TP n°3 - Arithmétique

■ ■ ■

Les commandes de ce T.P.

`convert(...,binary)`	
`piecewise`	`true`, `false`
`isprime`	`irem`, `iquo`
`nops`	`map`
`select`	`remove`
`add`	`mul`

Exercice 1. (`convert`) Donner l'écriture binaire de 945. Convertir ensuite ce nombre en base 8 puis 16.

Exercice 2. (`map`, `isprime`, `remove`)

1. Construire la liste des nombres premiers inférieurs à 10.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ème nombre de Fermat par $F_n = 2^{2^n} + 1$. Définir une fonction `fermat` qui étant donné un entier n associe son nombre de Fermat.

3. Construire la liste des 10 premiers nombres de Fermat.

4. En déduire, en suivant les pas d'Euler, qu'il existe un nombre de Fermat qui n'est pas premier.

Exercice 3. (`add`, `evalb`, `irem`)

1. Écrire une fonction `divise := n -> (i -> ...)` qui étant donné un entier naturel `n` renvoie une fonction booléenne qui renvoie vrai si `i` divise `n` et faux sinon.

2. En déduire une fonction `diviseurs n` qui renvoie les diviseurs d'un entier naturel `n`.

3. Écrire une fonction booléenne `est_parfait` qui détermine si un nombre est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs.

4. Écrire sous forme de liste l'ensemble des nombres premiers de la forme $2^n - 1$, pour $n \leq 1000$. Les nombres de la forme $2^n - 1$ sont appelés nombres de Mersenne.

5. On rappelle qu'un nombre pair est parfait si et seulement s'il s'écrit sous la forme $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, où $2^p - 1$ est premier. En déduire la liste des 10 premiers nombres parfaits pairs.

Exercice 4. (`nops`, `ifactors`, `mul`, `piecewise`)

1. Écrire une fonction `nbre_div_prem` qui détermine le nombre de diviseurs premiers d'un entier naturel.

2. Écrire une fonction `alpha` qui étant donné un entier n dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = \prod_{p \in \mathscr{P}_+} p^{\alpha_p}$, retourne $\prod_{p \in \mathscr{P}_+} \max\{\alpha_p, 1\}$.

3. La fonction de Möbius μ est définie sur n par $\mu(n) = 0$ s'il existe un nombre premier p tel que $p^2 | n$ et $(-1)^{w(n)}$ sinon (où $w(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers de n. Écrire la fonction `mu`.

4. Déterminer la valeur de $\sum_{d|n} \mu(d)$ pour $n \in [\![1, 10]\!]$. Montrer mathématiquement le résultat conjecturé.