TP n°6 - Espaces Vectoriels Euclidiens

■ ■ ■

Les commandes de ce T.P.

- `linalg[dotprod]`
- `copy`

Exercice 1. (Algorithme de Gram-Schmidt, `copy`)

1 . a) Écrire une procédure `ps1` qui prend en argument deux fonctions `P` et `Q` et qui renvoie la quantité $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

b) Calculer la norme des fonctions polynomiales $x \mapsto 1$ puis $x \mapsto x$ puis leur produit scalaire.

2. Écrire une procédure `orthonormalisation_GS(L,ps)` qui prend comme arguments une liste de vecteurs `L`, un produit scalaire `ps` et renvoie la famille orthonormalisée selon le procédé de Gram-Schmidt.

3. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$. Ces polynômes sont appelés polynômes de Legendre.

Exercice 2. (Géométrie - Centrale)

1. Rappeler et justifier la définition de la perpendiculaire commune à deux droites de $\mathbb{R}^3$.

2. On considère les plans P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^5$ dont les équations cartésiennes sont respectivement

$$\left\{\begin{array}{r} x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ -6x_1 + 3x_2 + 2x_5 = -2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 13 \\ -5x_1 - 6x_2 + 2x_4 = 29 \\ -x_1 + 2x_5 = 7 \end{array}\right.$$

Ces deux plans possèdent-ils une perpendiculaire commune ?

Exercice 3. (Matrices de Gram - Centrale) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. Montrer que la matrice $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

2. Montrer qu'il existe une unique famille $(y_1, \dots, y_n)$ de E telle que pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_i, y_j \rangle = \delta_{i,j}$.

3. Déterminer dans $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, une telle famille (y_1, y_2, y_3, y_4) si $e_1 = (1, 1, 3, 0)$, $e_2 = (-1, 4, 2, 1)$, $e_3 = (2, -1, 7, -3)$ et $e_4 = (1, 0, 1, 0)$.

4. Soit $P \subset E$ non vide. Montrer que P est finie si et seulement si $\{\langle x, y \rangle,\ x,\ y \in P\}$ est fini.