Géométrie plane

Chapitre VI

■ ■ ■

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

I - Repères, vecteurs

Exercice 1. (✍) On considère le point Ω de coordonnées $(0,1)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

1. Montrer que $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormé direct du plan.

2. Soit A le point de coordonnées $(2,0)$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminer ses coordonnées dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

4. Déterminer une équation cartésienne dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2. Soient les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(2,3)$ et $\overrightarrow{v}(-2,-1)$. Calculer l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en l'exprimant à l'aide d'une fonction circulaire réciproque.

II - Équations

Exercice 3. (✍) Soient les trois points $A(-3,-1)$, $B(4,1)$, $C(-2,3)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(1,2)$.

1. Former une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B.

2. Former une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ passant par C et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Exercice 4. On considère les points $A(1,2)$, $B(-1,3)$ et $C(2,-1)$.

1. Donner les équations cartésiennes des droites (AB), (BC) et (AC).

2. Donner les équations cartésiennes des hauteurs du triangle ABC.

3. En déduire que les hauteurs du triangle sont concourantes.

Exercice 5. (✍) Calculer la distance de la droite $\mathscr{D}$ au point A dans les cas suivants :

1. $A(0,0)$; $\mathscr{D}$ passant par $B(5,3)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(1,2)$.

2. $A(1,-1)$; $\mathscr{D}$ passant par $C(-1,1)$ et orthogonale à $\overrightarrow{n}(2,3)$.

3. $A(4,-1)$; $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 3 = 0$.

Exercice 6. (✍) Reconnaître les courbes d'équation polaire

1. $r = \frac{1}{\cos\theta + 3\sin\theta}$. **2.** $r = 3\cos\theta - 4\sin\theta$.

Exercice 7. (✐) Former les équations cartésiennes des bissectrices des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations cartésiennes respectives $\mathscr{D}_1 \ : \ 3x + 4y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}_2 \ : \ 12x - 5y + 4 = 0$.

Exercice 8. (✍) Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 6 = 0$.

Exercice 9. (✍) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ et de la droite $\mathscr{D} : x + 3y - 2 = 0$.

III - Géométrie

Exercice 10. Soient A, B, C, D quatre points tels que ABC et ABD soient des triangles non aplatis. On note $\mathscr{A}_{ABC}$ et $\mathscr{A}_{ABD}$ leurs aires.

1. Supposons que les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I. Montrer que $\frac{\mathscr{A}_{ABC}}{\mathscr{A}_{ABD}} = \frac{CI}{DI}$.

2. Que dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

Exercice 11. (Théorème de Menelaüs et Ceva ♡, ➶) Soient A, B, C trois points distincts du plan. Soient A' (resp. B', C') un point de la droite (BC) (resp. (CA), (AB)) distincts de A, B et C.

1. On veut montrer que les points A', B', C' sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

a) On suppose que les points A', B', C' appartiennent à une même droite Δ. Montrer le sens direct en introduisant le point H, projeté de C sur (AB) parallèlement à Δ.

b) Montrer la réciproque en supposant, par l'absurde, que la droite (AB) n'est pas parallèle à la droite $(A'B')$.

2. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Exercice 12. Soient A, B, C, A', B', C' six points du plan. On note G et G' les isobarycentres respectifs des familles (A, B, C) et (A', B', C').

1. Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

2. Montrer que G et G' sont confondus si et seulement s'il existe un point M tel que les quadrilatères $BA'CM$ et $B'AC'M$ soient des parallélogrammes.

Exercice 13. Soient ABC un triangle équilatéral, M un point à l'intérieur de ABC, A', B', C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$ et h la hauteur de ABC. Montrer que $MA' + MB' + MC' = h$.

Exercice 14. (♡) Soit ABC un triangle ni rectangle ni aplati, H son orthocentre et A' le projeté orthogonal de A sur la droite BC.

1. Montrer que A' est le barycentre de $\{(B, \tan \widehat{ABC}), (C, \tan \widehat{BCA})\}$.

2. En déduire que H est le barycentre de $\{(A, \tan \widehat{CAB}), (B, \tan \widehat{ABC}), (C, \widehat{BCA})\}$.

Exercice 15. (Polygone régulier, ➶) Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 tel que A_1 ait pour coordonnées cartésiennes $(1, 0)$. Déterminer le barycentre G du système à n points $((A_1, 1), \ldots, (A_n, n))$.

Exercice 16. (➶) Soient $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ dix points du plan deux à deux distincts et situés dans un carré de côté de longueur $a > 0$. Montrer qu'il existe un couple $(i, j) \in \{1, \ldots, 10\}^2$ tel que $0 < M_iM_j \leq \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

IV - Lieux de points

Exercice 17. (♡) Soient A, B deux points distincts, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs distincts et λ un réel.. Déterminer l'ensemble des points M tels que

1. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{v}$.

2. $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}) = 0$.

3. $\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}}{AM \cdot BM} = \lambda$.

4. $AM^2 - BM^2 = \lambda$.

5. $AM^2 + BM^2 = \lambda$.

Exercice 18. (✐) Soit ABC un triangle. Quand un point M décrit le segment $[AB]$ et un point N décrit le segment $[AC]$, quel est le lieu parcouru par le milieu de $[MN]$?