Courbes planes paramétrées

Chapitre XXVI

Dans tous les exercices, les courbes paramétrées sont définies dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

I - Tracé de courbes

Exercice 1. Tracer les courbes suivantes.

1. Parabole semi-cubique $(3t^2, 4t^3)$.

2. $(t^2 + \frac{2}{t}, t + \frac{1}{t})$.

3. $(\frac{t^2}{1+t-t^3}, \ln(1+t^2))$.

4. Cardioïde $((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$.

5. $(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$.

6. $(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2})$.

7. $(\frac{1}{t} + \ln(2+t), t + \frac{1}{t})$.

8. Lemniscate de Brenoulli $(a\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, a\frac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t})$.

9. Folium de Descartes $(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$.

Exercice 2. On considère la courbe paramétrée définie par $(t\cos t - \sin t, 2\cos t)$. Montrer que les tangentes à cet arc en les points stationnaires sont concourantes en l'origine O du repère.

II - Étude métrique des courbes

Exercice 3. Calculer une abscisse curviligne des courbes suivantes.

1. $y^2 = 2px$, $p > 0$.

2. $\rho(\theta) = \tanh\frac{\theta}{2}$.

Exercice 4. Soit $a > 0$. Calculer la longueur des courbes suivantes.

1. Cardioïde $\rho(\theta) = a(1+\cos(\theta))$.

2. Astroïde $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$.

Exercice 5. Soit $a > 0$. Montrer que l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ et la courbe Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = a\sin(2\theta)$ ont même longueur. Tracer ces deux courbes.

Exercice 6. On considère l'arc paramétré $(\cos^2(t) + \ln|\sin(t)|, \sin(t)\cos(t))$.

1. Calculer la longueur de l'arc paramétré entre les deux points de rebroussement.

2. Calculer le rayon de courbure de cet arc en tout point de paramètre $t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 7. (La cycloïde) Soit $a > 0$. Calculer la longueur d'une arche de l'arc paramétré $(a(t - \sin(t)), a(1-\cos(t)))$.

Exercice 8. Calculer les rayons de courbure d'une ellipse aux sommets de celle-ci.

Exercice 9. On considère une courbe paramétrée dont tous les points sont biréguliers.

1. Soit $f(t) = (x(t), y(t))$ un paramétrage cartésient de cette courbe.

a) Montrer que le rayon de courbure R vaut $R = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-x''y'}$.

b) Soit t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = y'(t_0) = 0$ et $x'(t_0)y''(t_0) \neq 0$. Montrer que $R(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{x^2(t)}{2y(t)}$.

2. Soit $\rho(\theta)$ un paramétrage polaire de cette courbe.

a) Montrer que le rayon de courbure R vaut $R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$.

b) En déduire la valeur de R si $\rho(\theta_0) = 0$ et $\rho'(\theta_0) \neq 0$.

Exercice 10. Calculer le rayon de courbure en l'origine du repère des arcs paramétrés suivants.

1. $(2t+t^3, 2\sinh^2(t))$.

2. $(t^2\ln t, t(\ln t)^2)$.

3. $\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{1+\cos(\theta)\cos(2\theta)}$.

4. $\rho(\theta) = \frac{\cos\theta - 2\sin\theta}{1+\sin^3\theta}$.

Exercice 11. On considère l'arc paramétré $(ae^{-t^2}(2\cos t - \sin t), ae^{-t^2}(2\sin t + \cos t))$.

1. Calculer le rayon de courbure en tout point.
Le centre de courbure est le point Ω défini par $\overrightarrow{M\Omega} = R\overrightarrow{N}$. Le cercle de courbure est le cercle de centre Ω et de rayon $|R|$.

2. Écrire l'équation du cercle de courbure en tout point.

3. En quels points le cercle de courbure passe-t-il par O ?

Vous pourrez vous délecter en naviguant sur le site : http ://www.mathcurve.com/index.htm