* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction et à la présentation.

* * *

Dans ce problème, nous allons munir l'ensemble des suites à valeurs réelles d'une loi appelée loi de convolution dont nous allons étudier certaines propriétés.
La Partie III est indépendante des Parties I et II.

Notations.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles. Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et n entier naturel, on note u_n le terme d'indice n de la suite u.

On rappelle que l'addition entre deux suites réelles u et v est la suite notée $u+v$ définie pour tout entier naturel n par $(u+v)_n = u_n + v_n$. $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est la suite nulle notée ω.

On appelle produit de convolution des suites u et v la suite notée $u \star v$ définie pour tout entier naturel n par

$$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}.$$

Partie I : Structures

On note ε la suite définie par $\varepsilon_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $\varepsilon_n = 0$.

1. Structure de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$.

a) Montrer que la suite ε est l'élément neutre pour la loi $\star$.

b) Montrer que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$ est un anneau commutatif.

2. Éléments symétrisables.

a) Soit $q \in \mathbb{R}$ et ρ la suite définie pour tout entier naturel n par $\rho_n = q^n$. Montrer que ρ est inversible pour la loi $\star$ et déterminer son inverse.

b) Montrer qu'une suite u est un élément symétrisable pour la loi $\star$ si et seulement si $u_0 \neq 0$.

3. Anneau intègre. Soient u, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \backslash \{\omega\}$. On pose $p = \min\{n \in \mathbb{N} \;;\; u_n \neq 0\}$ et $q = \min\{n \in \mathbb{N} \;;\; v_n \neq 0)$.

a) Justifier l'existence des entiers p et q.

b) Montrer que $(u \star v)_{p+q} \neq 0$.

c) En déduire que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$ est un anneau intègre.

4. On note $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

a) Montrer que $(\mathcal{S}_0(\mathbb{R}), +, \star)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$.

b) Soit $f \;:\; \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(u)_n = (-1)^n u_n$.
Montrer que f est un automorphisme involutif de l'anneau $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$.

Partie II : Relation d'ordre

Un anneau $(A, +, \star)$ muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ est dit *totalement ordonné* si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total sur A et si pour tous u, v, $w \in A$

1. Si $u \preccurlyeq v$, alors $u + w \preccurlyeq v + w$.
2. Si $0 \preccurlyeq u$ et $0 \preccurlyeq v$, alors $0 \preccurlyeq u \star v$, où 0 désigne l'élément neutre de A pour la loi $+$.

On munit l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de la relation binaire $\preccurlyeq$: pour tous u, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on dit que $u \preccurlyeq v$ s'il existe un entier naturel non nul k tel que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $u_i = v_i$ et $u_k \leq v_k$.

5. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble des suites $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6. Montrer que l'anneau $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$ muni de la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est un anneau totalement ordonné.

Un anneau $(A, +, \star)$ totalement ordonné muni d'une relation d'ordre total $\preccurlyeq$ est dit *archimédien* si pour tous x, $y \in A$ tels que $0 \preccurlyeq x$, il existe un entier naturel n tel que $y \preccurlyeq nx$.

7. L'anneau $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \star)$ est-il archimédien ?

Partie III : Autour de la série exponentielle

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tous p, $q \geq n_0$, $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

8. Montrer que toute suite de nombres convergentes est une suite de Cauchy.

9. On suppose dans cette question que u est une suite de Cauchy à valeurs réelles.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, les nombres réels $i_p = \inf\{u_n,\, n \geq p\}$ et $s_p = \sup\{u_n,\, n \geq p\}$ sont bien définies.

b) Montrer que les suites (s_p) et (i_p) convergent vers une même limite.

c) En déduire que toute suite de Cauchy à valeurs réelles est convergente.

10. Déduire des questions précédentes que toute suite de Cauchy à valeurs complexes est convergente.

Pour tout nombre complexe z, on note $u(z) = (u(z)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u(z)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

11. Propriétés de convergence.

a) Soit r un nombre réel positif. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{r^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) En déduire que pour tout nombre complexe z, la suite $u(z)$ est convergente. On notera e_z sa limite.

12. Soient z, $z' \in \mathbb{C}$.

a) Pour tout entier naturel n, on note $v_n = \frac{z^n}{n!}$ et $w_n = \frac{(z')^n}{n!}$. Montrer que les suites $(u(z)_n u(z')_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} (v \star w)_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

b) En déduire que $e_z \cdot e_{z'} = e_{z+z'}$.