* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction et à la présentation.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n ; la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n ; J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

On appelle ensemble des *matrices stochastiques* d'ordre n sur le corps $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{K}_n$, l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls, et vérifient

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k$.

On appelle *valeur propre* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Pour toute valeur propre λ de A, on appelle *espace propre* associé à λ, noté $\mathcal{E}_\lambda$, l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ;\ AX = \lambda X\}$. On admettra que $\mathcal{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Enfin, on définit la *convergence d'une suite de matrices* de la manière suivante. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel p, on note $A_p = \left(a_{ij}^{(p)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si et seulement si pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ la suite $\left(a_{ij}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers b_{ij}.

Les parties **I** à **III** sont indépendantes.

Préliminaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs. On note $E_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $A \in \mathcal{K}_n$ si et seulement si $AE_n = E_n$.

2. Questions de structures.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{K}_n$ est stable par produit matriciel.

b) L'ensemble $\mathcal{K}_n$ est-il stable pour l'addition ?

Partie I - Matrices stochastiques d'ordre 2

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{K}_2$. On note $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$ avec a, $b \in [0,1]$. Soit p un entier naturel. On pose $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.

3. Lorsque $a = b = 1$, puis lorsque $a = b = 0$, déterminer A^p.

4. Calculer $P(A)$.

5. Première méthode. On suppose dans cette question que $(a,b) \neq (1,1)$ et $(a,b) \neq (0,0)$.

a) On suppose qu'il existe deux polynômes Q et R de $\mathbb{R}[X]$ tels que R soit de degré strictement inférieur à 2 et que $X^p = PQ + R$. Déterminer le polynôme R.

b) En déduire la valeur de A^p.

c) Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite B que l'on précisera.

6. Deuxième méthode. On suppose dans cette question que $(a,b) \neq (1,1)$ et $(a,b) \neq (0,0)$. On notera φ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de A. Pour toute valeur propre λ de A, déterminer son espace propre $\mathcal{E}_\lambda$.

c) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice D de φ est diagonale.

d) Pour tout entier naturel non nul p, en déduire la valeur de A^p.

e) Montrer que la matrice B est la matrice d'une projection dont on déterminera l'image.

Partie II - Une matrice stochastique d'ordre n

Soient α et β deux réels positifs, avec $\beta \neq 0$ et $M \in \mathcal{K}_n$ la matrice stochastique dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à α, les autres valant β.

7. Montrer que $|\alpha - \beta| < 1$.

8 . a) Pour tout entier naturel non nul k, calculer J_n^k.

b) Exprimer M à l'aide des matrices I_n et J_n puis en déduire, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^\star$, une expression de M^p comme combinaison linéaire de I_n et J_n.

9. En déduire que la suite de matrices $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice N et déterminer sa limite N que l'on précisera.

10. Caractériser géométriquement la matrice N.

Partie III - Convergence des matrices strictement stochastiques

On dit qu'une matrice est strictement stochastique si elle est stochastique et que tous ses coefficients sont strictement positifs. On considère dans cette partie une matrice strictement stochastique $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

On note $\varepsilon = \min\limits_{i,j} a_{ij}$. Pour tout entier naturel k, on note $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$; pour tout entier $j \in [\![1,n]\!]$, on note $\alpha_j^{(k)} = \min\limits_i a_{ij}^{(k)}$, $\beta_j^{(k)} = \max\limits_i a_{ij}^{(k)}$ et $\delta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}$.

11. Montrer que pour tout entier naturel non nul k, la matrice A^k est strictement stochastique.

12. Soient k un entier naturel non nul et $j \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer que $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$.

b) Montrer que $\delta_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)\delta_j^{(k)}$.

13 . a) En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice P que l'on précisera.

b) Montrer que la matrice P est de rang 1.

c) En déduire que P est la matrice d'un projecteur dont on précisera l'image.