Devoir à la Maison

à rendre le lundi 13 septembre 2010

* * *

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout entier n non nul, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

2. Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $A \cap X = B$.
Attention, l'inconnue est l'ensmble X.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0$.
Tout pourra commencer par une étude de fonction.

Exercice 2. (L'inégalité arithmético-géométrique)

1 . a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout $(x_1, \ldots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^n}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{2^n} x_i\right)^{1/2^n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{2^n} x_i}{2^n}.$$

2. Soit k un entier naturel non nul et $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$. On note $m = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$ la moyenne arithmétique des nombres $x_1, \ldots, x_k$.

a) Vérifier qu'il existe un entier n_0 tel que $2^{n_0} \leq k < 2^{n_0+1}$.

b) On pose $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2^{n_0+1}} = m$. En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{1/k} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

$\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{1/k}$ est appelée moyenne géométrique et l'inégalité précédente est appelée inégalité arithmético-géométrique.