Devoir à la Maison

à rendre le lundi 04 octobre 2010

* * *

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. On notera $|z|$ le module d'un complexe z.

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 2\mathrm{i}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

2 . a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6\mathrm{i}$.

b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f.

3. Soit h un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.

4 . a) Déterminer l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, où on a noté $f(\mathcal{D}) = \{f(z),\, z \in \mathcal{D}\}$.

b) La fonction est-elle une application surjective de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$?

c) f est elle une application injective de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$?

Soit g l'application définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que

$$\forall z \in \mathcal{D},\ g(z) = |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3.$$

5. Soit $z \in \mathcal{D}$ un nombre complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y. Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de $g(z)$. Montrer en particulier que la partie réelle de $g(z)$ vaut $2x^3 - 2xy^2 - 4xy$.

Soit le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\,(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$. Soit Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $g(z)$ est un imaginaire pur.

6. Montrer que Γ est inclus dans la réunion d'une droite Δ et d'une conique $\mathcal{C}$ (on montrera que $\mathcal{C}$ peut-être décrite par une équation cartésienne de degré 2, i.e. du type $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$).