Devoir à la Maison

à rendre le lundi 18 octobre 2010

* * *

On désigne par $\mathcal{H}$ (demi-plan de Poincaré) l'ensemble des nombres complexes $x+iy$ tels que $y>0$ et par $\mathbb{D}$ (disque unité) l'ensemble des nombres complexes de module strictement plus petit que 1 ; on pose $\text{Re}z = x$, $\text{Im}z = y$. On dit qu'une application φ est une homographie s'il existe quatre nombres complexes a, b, c, d tels que $\varphi \; : \; z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrer que l'application $f \; : \; z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est bien définie et est une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{D}$.

2 . a) Préciser le domaine de définition de l'homographie φ.

b) Si $ad-bc=0$, montrer que φ est une fonction constante.

c) Si $ad-bc\neq 0$, montrer que φ définit une bijection entre des ensembles à préciser. Préciser l'application réciproque.

3. Homographies et cercle-droites

a) Soient φ une homographie non constante et $k\in\mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $\{z\in\mathbb{C} \; ; \; |\varphi(z)|=k\}$ est soit une droite soit un cercle.

b) Réciproquement, montrer que toute droite ou tout cercle du plan est de la forme $\{z\in\mathbb{C} \; ; \; |\varphi(z)|=k\}$, où φ est une homographie et k un réel.

4. Montrer que l'ensemble des homographies non constantes muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe. Ce groupe-est-il commutatif ?

5. Transformations de Moebius.

a) Soient α, z deux nombres complexes. Montrer l'équivalence

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|<1 \;\Leftrightarrow\; (1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)>0.$$

b) En déduire que pour tout $\alpha\in\mathbb{D}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $|\lambda|=1$, l'application $\begin{aligned}\varphi_{\lambda,\alpha} : &\mathbb{D}\to\mathbb{D}\\ &z\mapsto\lambda\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\end{aligned}$ est bien définie.

c) Vérifier que $\varphi_{\lambda,\alpha}$ définit une bijection sur $\mathbb{D}$ et déterminer sa bijection réciproque.

d) Montrer que l'ensemble des transformations de Moebius muni de la loi de composition est un groupe.

On peut montrer que l'ensemble des transformations de Moebius est l'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

6. Rotations dans le demi-plan de Poincaré. Démontrer les résultats suivants.

a) Pour tout $z\in\mathcal{H}$ et pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, le nombre complexe $\frac{z\cos\theta-\sin\theta}{z\sin\theta+\cos\theta}$ est bien défini et appartient à $\mathcal{H}$.

b) Si l'on pose $A_\theta(z)=\frac{z\cos\theta-\sin\theta}{z\sin\theta+\cos\theta}$. Montrer que A_0 est l'application identité sur $\mathcal{H}$ et que pour tous θ, $\theta'\in\mathbb{R}$, $A_{\theta+\theta'}(z)=A_\theta\left(A_{\theta'}(z)\right)$.

On dit que le groupe $((A_\theta)_\theta,\circ)$ agit sur $\mathcal{H}$.

c) La fonction réelle définie sur $\mathcal{H}$ par $c \; : \; z\mapsto\frac{|z|^2+1}{2\text{Im}z}$ est invariante par les transformation A_θ, i.e. pour tous $z\in\mathcal{H}$, $\theta\in\mathbb{R}$, $c(A_\theta(z))=c(z)$.

d) Si $z\in\mathcal{H}$ est différent de i, on a $A_\theta(z)=A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $\theta-\theta'\in\pi\mathbb{Z}$.

7. Soit z_0 un point de $\mathcal{H}$ distinct de i. On appelle orbite de z_0 l'ensemble $O_{z_0}=\{A_\theta(z_0),\,\theta\in\mathbb{R}\}$.

a) Montrer que l'orbite de z_0 est incluse dans le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $\sqrt{c(z_0)^2-1}$.

b) Montrer que l'orbite de z_0 est égale à ce cercle.