Devoir à la Maison

Autour des coniques

à rendre le jeudi 04 novembre 2010

* * *

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie I : Changement de repère

On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne

$$y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + (4 - 3\sqrt{3})y + 6 - 6\sqrt{3} = 0.$$

1. De quel genre de conique s'agit-il ?

2. On considère le point O' de coordonnées cartésiennes $(-3, -2)$. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est $(y')^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0$.

3. Soient $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$) le vecteur image de $\overrightarrow{i}$ (resp. $\overrightarrow{j}$) par la rotation d'angle $-\pi/3$. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie II : Coniques et Inversions du limaçon de Pascal

On désigne par $\mathcal{P}^\star$ le plan privé de l'origine O. On appelle *inversion* l'application f de $\mathcal{P}^\star$ dans $\mathcal{P}^\star$ qui au point M de coordonnées polaires (ρ, θ) associe le point de coordonnées polaires $\left(\frac{1}{\rho}, \theta\right)$.

4. Définition d'un limaçon de Pascal.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Une droite $\mathcal{D}$ passant par O recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point P (éventuellement confondu avec O si $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$). On construit sur $\mathcal{D}$ deux points M et N distincts tels que $PM = PN = d$, où d est un réel strictement positif fixé.

a) Démontrer que M et N décrivent la courbe Γ_d d'équation polaire $\rho = \cos\theta + d$.

b) Étudier Γ_d en discutant suivant les valeurs de d.

c) Montrer que les points à tangente verticale des courbes Γ_d appartiennent à l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ ou à un cercle que l'on déterminera.

d) Tracer sur une même figure les courbes $\Gamma_{\frac{1}{2}}$, Γ_1, $\Gamma_{\frac{3}{2}}$ et Γ_2.

5. Dans toute la suite, on désigne par E_d l'image de la courbe Γ_d par l'inversion f. Démontrer que E_d est une conique dont on déterminera en fonction de d le paramètre p et l'excentricité e.

6 . a) Pour quelles valeurs de d la courbe E_d est-elle une ellipse ?

b) Déterminer alors son demi-grand axe a, son demi-petit axe b et sa demi-distance focale c.

c) Déterminer le lieu des sommets B et B' du petit axe de l'ellipse lorsque d varie.

7 . a) Pour quelles valeurs de d la courbe E_d est-elle une hyperbole ?

b) Déterminer alors des équations cartésiennes de ses asymptotes.

8. Tracer sur une même figure (différente de la précédente) les coniques $E_{\frac{1}{2}}$, E_1, $E_{\frac{3}{2}}$ et E_2.

Partie III : Courbe orthoptique à l'hyperbole

La courbe orthoptique d'une courbe est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à la courbe perpendiculaires entre elles. On cherche à identifier la courbe orthoptique d'une hyperbole $\mathcal{H}$. On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Soient M_0 un point du plan et D_m une droite de pente m passant par le point M_0. Montrer que les points $M(x, y)$ d'intersection de D_m et de $\mathcal{H}$ satisfont l'équation

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2m(y_0 - mx_0)x - a^2((y_0 - mx_0)^2 + b^2) = 0.$$

10. En déduire une condition sur m pour que la courbe D_m soit tangente à $\mathcal{H}$.

11. Conclure en identifiant la courbe orthoptique de $\mathcal{H}$.

Partie IV : Une loi interne sur les coniques

On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 = 1$.

12. Une loi de composition interne sur le plan.

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'une loi de composition interne notée $*$ qui aux points M et M' de coordonnées cartésiennes respectives (x, y) et (x', y') associe le point $N = M * M'$ de coordonnées (α, β) avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & xx' + 3yy' \\ \beta & = & xy' + yx' \end{array}\right.$$

a) Montrer que la loi $*$ est associative, commutative et qu'elle possède un élément neutre qu'on précisera.

b) On considère l'application $F \ : \ \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ qui à un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) associe $F(M) = x^2 - 3y^2$. Décrire les lignes de niveau $E_0 = \{M \in \mathcal{P} \ ; \ F(M) = 0\}$ et $E_1 = \{M \in \mathcal{P} \ ; \ F(M) = 1\}$.

c) Montrer que

$$\forall \ (M, M') \in \mathcal{P}^2, \ F(M * M') = F(M)F(M').$$

En déduire que si M et M' appartiennent à $\mathcal{H}$ alors $M * M'$ appartient à $\mathcal{H}$.

13. Structure de groupe sur $\mathcal{H}$.

a) Montrer $(\mathcal{H}, *)$ est un groupe commutatif et que l'inverse d'un point M de $\mathcal{H}$ pour la loi $*$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

b) On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble formé par les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses strictement positives et $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}^+$.
$(\mathcal{H}^+, *)$ est-il un sous-groupe de $(\mathcal{H}, *)$?
$(\mathcal{H}^-, *)$ est-il un sous-groupe de $(\mathcal{H}, *)$?

Partie V : Ellipses et Cercles de Chasles

Dans cette partie, on identifie le plan avec le plan complexe. Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a > b$. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et on note $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Á tout point M de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'affixe z, on associe un point M' d'affixe z' telle que $z^2 + (z')^2 = c^2$.

14. Une propriété d'orthogonalité.

a) Déterminer les points associés à chacun des quatre sommets de l'ellipse.

b) Montrer que $(c - z)(c + z) = (z')^2$ et en déduire que $(OM')^2 = MF \cdot MF'$, où F et F' désignent les foyers de l'ellipse.

c) Montrer que la droite (OM') est orthogonale à la bissectrice intérieure à l'angle FMF'.

15. Étude des relations entres les points et leurs associés.

a) Établir les relations

$$|z - c|^2 + |z + c|^2 = 2(|z|^2 + c^2) \text{ et } MF + MF' = M'F + M'F'.$$

b) En déduire que $M' \in \mathcal{E}$.

c) Représenter sur une figure deux points M_1 et M_2 de l'ellipse, ayant les mêmes associés M_1' et M_2'. Les droites (M_1M_2) et $(M_1'M_2')$ s'appellent des diamètres conjugués.

16. Construction des cercles de Chasles. Soient P, P' les deux points d'affixes respectives $u = z + iz'$ et $u' = z - iz'$.

a) Montrer que $MF + MF' = OP + OP'$.

b) On écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Montrer que $xy + x'y' = 0$ puis que $x^2 + (x')^2 = a^2$.

c) Montrer que quand M décrit l'ellipse $\mathcal{E}$, les points P et P' décrivent deux cercles dont on précisera les caractéristiques.

d) Faire une figure de l'ellipse et de ces deux cercles comportant les constructions des points P et P' à partir d'un couple de points associés (M, M').