DM n° 10

# Devoir à la Maison

Noyaux itérés

à rendre le lundi 03 janvier 2011

* * *

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés de $f$ par $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \operatorname{Im} f^n$ et $G_n = \operatorname{Ker} f^n$.

## Exemples et Contre-exemples

**1.** Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (x - y, x - y, 0)$.

**a)** Montrer que $g$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

**b)** Déterminer $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$. L'endomorphisme $g$ est-il surjectif ? injectif ?

**c)** Déterminer $g^2$ et en déduire $\operatorname{Ker} g^2$ et $\operatorname{Im} g^2$.

**2.** Montrer que les propositions suivantes sont fausses.

**a)** $\forall\ f \in \mathcal{L}(E)$, $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

**b)** $\forall\ f \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

**c)** Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, alors $f$ est un projecteur de $E$.

## Noyaux et Images

Dans toute la suite, $f$ désigne un endomorphisme de $E$.

**3.** Montrer les équivalences suivantes.

**a)** $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

**b)** $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

**4.** Soient $i$, $j$ deux entiers naturels. Montrer les équivalences suivantes.

**a)** $E = \operatorname{Ker} f^i + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f^i = \operatorname{Im} f^{i+1}$.

**b)** $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^j = \{0\} \iff \operatorname{Ker} f^j = \operatorname{Ker} f^{j+1}$.

## Étude des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**5.** On s'intéresse aux suites d'espaces vectoriels $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**a)** Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

**b)** Montrer que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.

**6.** On suppose qu'il existe deux entiers $p$, $q$ tels que $F_p = F_{p+1}$ et $G_q = G_{q+1}$. Soient $i = \min\{n \in \mathbb{N}\ ;\ F_n = F_{n+1}\}$ et $j = \min\{n \in \mathbb{N}\ ;\ G_n = G_{n+1}\}$.

**a)** Montrer que $i$ et $j$ sont bien définis.

**b)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geq p$, $F_n = F_p$.

**c)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geq q$, $G_n = G_q$.

**d)** Prouver que $i = j$ et que $E = F_i \oplus G_i$.