Devoir à la Maison

Points fixes et Convexité

Devoir non relevé

* * *

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^2$, strictement convexe telle que $f(1)=1$. On note $f_n = \underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ fois}}$ et on suppose que $f_n(0)$ est croissante. On note $m=f'(1)$.

1. Étude de la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que nous noterons q.

b) Montrer que $f(q)=q$.

2. On suppose qu'il existe deux réels distincts q_1, $q_2 \in]0,1[$ solutions de l'équation $f(s)=s$.

a) Montrer qu'il existe deux réels distincts ξ_1, $\xi_2 \in]0,1[$ tels que $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=1$.

b) En déduire que l'équation $f(s)=s$ admet au plus une solution dans $]0,1[$.

Le cas $m\leq 1$

3. Soit g la fonction définie pour tout $s\in[0,1]$ par $g(s)=f(s)-s$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante.

b) En déduire que pour tout $s\in[0,1[$, $f(s)>s$.

4. Déduire des questions précédentes que lorsque $m\leq 1$, on a $q=1$.

Le cas $m>1$

5. Montrer qu'il existe un réel $s_0\in[0,1[$ tel que pour tout $s\geq s_0$, $f(s)<s$.

6. En déduire que lorsque $m>1$, on a $q\in[0,1[$.