Devoir à la Maison

Le théorème de d'Alembert-Gauss

Devoir non relevé

* * *

On propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss qui assure que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $p > 0$. On va montrer que $\inf_{z\in\mathbb{C}}\{|P(z)|\} = 0$. Nous noterons $\mathcal{P} = \{|P(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure notée α.

2. Soit $r > 0$. Montrer que pour tout nombre complexe z de module r, on a $|P(z)| \geq |a_p|r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|r^k$.

3. En déduire que $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$.

4. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un nombre complexe z_0 tels que $\lim_{n\to+\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)| = \alpha$.

5. On va montrer par l'absurde que $\alpha = 0$.

a) Soit $Q = \frac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$. Montrer que $\inf_{z\in\mathbb{C}}\{|Q(z)|\} = |Q(0)| = 1$.

b) Montrer que Q peut se mettre sous la forme $Q = \sum_{k=q+1}^{p} b_k X^k - b_q X^q + 1$, où $b_q \neq 0$ et $1 \leq q \leq p$.

c) On note $b_q = \rho e^{-i\theta}$ et $z = re^{i\theta/q}$. Montrer que pour r assez petit, $|Q(z)| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k|r^k$.

6. Conclure.