Devoir à la Maison

Polynômes interpolateurs de Lagrange

À rendre le lundi 21 mars 2011

* * *

Pour tous $i,\, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. Une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit π l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\pi(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.

a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π.

c) Vérifier que $\mathrm{Im}\pi \oplus \mathrm{Ker}\,\pi = \mathbb{R}[X]$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon \;:\; \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n,\ P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.

a) Montrer que ε est un isomorphisme.

b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$. Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \ldots, a_n)$.

4. Soient $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ et $x \in [a, b]$. On suppose que $a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b$ et on note P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f. Montrer que

$$\forall\, x \in [a, b],\ \exists\, \xi \in]a, b[\ ;\ |f(x) - P(x)| \leq \sup_{[a,b]} |f^{(n)}| \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!}.$$

On pourra considérer la fonction $\varphi \;:\; [a, b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod\limits_{i=1}^{n} (t - a_i)$, où K est une constante judicieusement choisie. On pourra enfin se demander pourquoi Tchebychev a introduit les polynômes qui portent maintenant son nom...