

\* \* \*

### Formule de Wallis

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$ .

1. Calculer  $W_0$ ,  $W_1$  et  $W_2$ .

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout  $n \geq 2$ ,  $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ .

3. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. La formule de Wallis.

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$ .

b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

### Formule de Stirling

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $u_n = \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{n!}{\sqrt{n}}$ .

5. Convergence de suite.

a) Étudier la monotonie de la fonction  $\varphi : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in [1, +\infty[$  par  $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ .

b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. En déduire qu'elle est convergente. Nous noterons  $\ell$  sa limite.

6. Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $h_k$  la fonction affine vérifiant

$$h_k(k) = \ln k, \quad h_k(k+1) = \ln(k+1).$$

a) Montrer que pour tout  $t \in [k, k+1]$ ,

$$0 \leq \ln(t) - h_k(t) \leq (t-k) \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$0 \leq \int_1^n \ln x \, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k+1) + \ln k}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\ln \left( \frac{n}{e} \right)^n - \ln n! + \ln \sqrt{n} \leq -\frac{1}{2}$$

7. Détermination de  $\ell$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sqrt{e} \leq u_n$ .

b) En déduire que  $\ell$  est non nul et que  $n! \sim \ell \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ .

c) En utilisant la formule de Wallis, identifier  $\ell$ . En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$