Devoir à la Maison

Étude d'une équation fonctionnelle

Non relevé

* * *

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas particuliers l'équation fonctionnelle

$$f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=g(x),\; x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ et g est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans cette partie que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que les fonctions solutions de (1) sont deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle

$$f''(x)-f(x)=g''(x),\; x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. En déduire les solutions de l'équation (1) lorsque

a) g est la fonction nulle,

b) g est une constante,

c) g est un polynôme de degré 1.

3. Soient $k_1,\, k_2\in\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g'(t)\,dt+k_1\right]+\frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t}g'(t)\,dt+k_2\right]$$

est solution de l'équation (2). Déterminer k_1 et k_2 pour que f soit solution de (1).

4. Résoudre l'équation (1) lorsque g est la fonction exponentielle.

Dans cette partie, on suppose que la fonction g est seulement continue

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

5. Montrer que l'équation (1) possède au plus une solution.

6. On définit l'application A qui à une fonction f de $\mathcal{C}$ associe la fonction $A(f)$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$A(f)(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Montrer que l'application A est une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ injective.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on désigne par A_n l'itérée n-ème de A, i.e. $A_2(f)=A(A(f)),\dots,A_n(f)=A(A_{n-1}(f))$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $A_2(f)(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}f(t)\,dt$.

b) En déduire l'expression de $A_n(f)$.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n=A+A_2+\cdots+A_n$ et U l'application qui à toute fonction f de $\mathcal{C}$ associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$U(f)(x)=\int_0^x \sinh(x-t)f(t)\,dt.$$

a) Montrer que pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$\left|\sinh(u)-\sum_{k=1}^{n}\frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right|\leq\frac{\cosh(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

b) En déduire que pour tout réel x,

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \frac{\cosh(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)|\, dt \right|.$$

c) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$ et pour tout réel x,

$$(U \circ A)(f)(x) = (A \circ U)(f)(x) = (U - A)(f)(x).$$

9. Soit Id la fonction identité sur $\mathcal{C}$.

a) Montrer que les applications $\mathrm{Id} - A$ et $\mathrm{Id} + U$ sont des applications bijectives de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, réciproques l'une de l'autre.

b) En déduire la solution de l'équation (1).

10. Expliciter f lorsque la fonction g est paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$