Devoir à la Maison

Carrés Magiques d'ordre 3

À rendre le vendredi 08 avril 2011

* * *

On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un réel s satisfaisant, pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ji} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} = s.$$

Une telle matrice est appelée un *carré magique* de *nombre magique* s. On notera $\mathcal{C}_3$ l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3.

1. Montrer que $\mathcal{C}_3$ est un espace vectoriel.

2. Les matrices antisymétriques.

a) Soit A une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

b) Étant donné un carré magique antisymétrique, déterminer le nombre magique associé.

c) Montrer que l'ensemble des carrés magiques antisymétriques est un espace vectoriel de dimension 1 dont on déterminera une base.

3. Les matrices symétriques. Soit A un carré magique symétrique de nombre magique s. On note B la matrice $A - \dfrac{s}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice B est un carré magique.

b) Montrer qu'il existe un espace vectoriel E de dimension 1 tel que pour tout carré magique A symétrique d'ordre 3, la matrice correspondante B soit dans E.

c) Décrire l'ensemble des carrés magiques symétriques.

4. Déduire des questions précédentes une base de l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3.

A. Camanes