Exponentielle de matrices

Vacances de Pâques

* * *

Si p est un entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

Partie A : L'exponentielle des matrices nilpotentes d'indice 3

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice trois si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre 3. On note I_p la matrice identité d'ordre p. Pour tout réel t, on note $E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

1. Vérifier la relation

$$\forall\ (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)E(t) = E(s+t).$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $(E(t))^n = E(nt)$.

3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

5. En déduire que l'application $E\ :\ \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ t \mapsto E(t)$ est injective.

6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter les matrices $E(t)$ et $E(t)^{-1}$.

Partie B : Étude d'une matrice d'ordre 2

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

7. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles (i.e. des espaces vectoriels de dimension 1), supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$) de F (resp. G).

8. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

9. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre 2) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

10. Expliciter D^n pour tout entier naturel n. Démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous la forme de tableau matriciel.

Partie C : L'exponentielle de la matrice A

On reprend les notations de la partie **B**.

11. Montrer que, pour tout réel t, on a $e^t = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

12. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}A^k$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$. Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$.

13. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t)$, $c(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t)$, $d(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t)$. Expliciter la matrice $E(t)$.

A. Camanes

14. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R carrées d'ordre 2 (les expliciter) telles que

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ E(t) = e^{2t}Q + e^{t}R.$$

15. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à Q et R ?

16. En déduire que

$$\forall\ (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s)E(t) = E(s+t).$$

Que dire de $E(t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? de $E(t)^{-1}$? L'application $E\ :\ t \mapsto E(t)$ est-elle injective ?

A. Camanes