

* * *

Pour tout entier naturel n , on définit sur \mathbb{R}_+ les fonctions φ_n , Φ_n et f par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2nx) \cos x}{\sin x} & , x \notin \pi\mathbb{N} \\ 2n & , x \in \pi\mathbb{N} \end{cases} , \Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2nx)}{x} & , x > 0 \\ 2n & , x = 0 \end{cases} , f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0. \end{cases} .$$

1. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que les fonctions f , φ_n et Φ_n sont continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ existe et appartient à \mathbb{R} . Nous la noterons ℓ .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(t) dt$.

a) Montrer que u_n est bien défini.

b) Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la valeur de u_n .

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_n(t) dt$.

a) Montrer que v_n est bien défini.

b) Étudier la limite lorsque n tend vers l'infini de v_n . Si elle existe, on exprimera cette limite en fonction de ℓ .

4. On suppose que g est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$ et que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(w_n t) dt = 0$.

5. On considère la fonction h définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

6. En déduire la valeur de ℓ .

7. Pour tout réel positif x , on note $F(x) = \int_0^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$. On propose de démontrer que f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que la fonction F n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que F est croissante et que pour tout entier naturel k , $F((k+1)\pi) - F(k\pi) \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.