Autour de la chaînette

À rendre le 09 mai 2011

* * *

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé de l'espace vectoriel euclidien à deux dimensions et a un réel non nul. Étant donnée un arc paramétré Γ, on notera pour chacun des points M de son support, $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ le repère de Frénet associé. Dans tout ce devoir, a désigne un réel strictement positif.

1. Quelques généralités. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de dérivée seconde strictement positive.

a) Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie par une équation cartésienne $y = f(x)$. Calculer le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ en tout point d'abscisse x en fonction des dérivées de y.

b) Soit N le point d'intersection entre la normale à la courbe $\mathcal{C}$ en x et l'axe des abscisse. On appelle normale la distance NM. Montrer que $\overline{NM} = y\frac{ds}{dx}$.

Autour de la chaînette

2. Soit Γ l'arc paramétré défini sur $\mathbb{R}_+^\star$ par l'équation paramétrique $\left(a\ln t, \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right)$. Déterminer une équation cartésienne de Γ.

3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$, $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$, équation régissant la tension d'un fil dont les deux extrémités sont fixes.

a) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{y''(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$.

b) En déduire que pour tout réel x, on a $y(x) = a \cosh\frac{x}{a}$.

4. Déterminer une abscisse curviligne ainsi que le rayon de courbure de l'arc Γ. Montrer que, dans le cas de Γ, le rayon de courbure est égal à la normale.

Développée

On appelle centre de courbure au point M de Γ le point Ω défini par $\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{\gamma}\overrightarrow{N}$, où γ désigne la courbure de Γ au point M.

5. On appelle développée d'une courbe le lieu de ses centres de courbure.

a) Montrer que la développée de Γ est la courbe paramétrée par $(a(t - \frac{\sinh(2t)}{2}), 2a\cosh(t))$.

b) Étudier et tracer la développée de Γ.

La chaînette en mouvement

6. La chaînette Γ roule sans glisser sur la droite (Ox), i.e. l'abscisse du point de contact entre le support de Γ et (Ox) est égal à une constante près à son abscisse curviligne. Déterminer le lieu du centre de courbure au point de contact (on dit que la chaînette est la *roulette parabolique de Delaunay*).

Une courbe orthoptique

Cette partie est indépendante des précédentes. Soit a un réel strictement positif.

7. Tracer le support de l'arc paramtré $\mathcal{A}$, appelé astroïde, d'équation paramétrique $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$.

8. Déterminer et tracer la courbe orthoptique de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des points d'où l'on peut mener au moins deux tangentes à $\mathcal{A}$ orthogonales.

A. Camanes