Un problème d'optimisation

À rendre le 23 mai 2011

* * *

Soit E l'espace des fonctions défini par

$$E = \{f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ \exists a,\, b,\, c,\, d,\, e \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathbb{R},\, f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + e\cos(x)\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base.
Pour tous f, $g \in E$, on définit la quantité

$$(f|g) = \int_0^\pi f(t)g(t)\, dt.$$

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.

3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de E.

4. À l'aide du procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

5. Montrer que la fonction cos n'appartient pas à $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le projeté orthogonal de cos sur $\mathbb{R}_2[X]$.

6. Calculer la distance de la fonction cos à $\mathbb{R}_2[X]$.

7. Calculer le minimum, lorsque a, b et c décrivent l'ensemble des réels de la quantité $\int_0^\pi (a + bx + cx^2 - \cos x)^2\, dx$.

8. Calculer la distance du polynôme X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

9. Comparer les distances de cos et X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.