Devoir surveillé n° 0

du samedi 11 septembre 2010

Durée : 2 heures

Toute calculatrice interdite

– Exercice 1 – Fonctions usuelles

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \exp\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ? Justifier.
2. Étudier la parité de f.
3. Quel est l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f ? Justifier.
4. Calculer la dérivée de f, ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. En déduire le tableau des variations de f.

– Exercice 2 – Trigonométrie

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$ les expressions suivantes :

$$\text{(i)}\ \cos(a+b), \qquad \text{(ii)}\ \sin(a+b), \qquad \text{(iii)}\ \tan(a+b).$$

– Exercice 3 – Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
2. $xy = 2$ et $x + y = 4$.

– Exercice 4 – Étude de fonctions

Donner le domaine de définition D, le domaine de dérivabilité D' puis la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1$.
2. $g(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$.
3. $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{e^{2x+1}}$.

– Exercice 5 – UN AIR DE DÉJÀ VU...

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x^2 + x + 1| > |x - 4|$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Exprimer la quantité $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$ sous la forme d'un quotient de fonctions sinus.

QCM

Lire attentivement les instructions ci-dessous.

Le QCM de 8 questions ci-après est divisé en 2 QCM abordant chacun un exercice différent.

Pour chaque question, 4 réponses sont proposées.

Chaque question peut comporter de 0 **à** 4 **réponses exactes.**

À chaque question numérotée entre 1 et 8 correspond sur la grille-réponse ci-après une ligne de cases qui porte le même numéro. Chaque ligne comporte 5 cases (a), (b), (c), (d), (e). Pour chaque ligne, vous avez 3 possibilités :

▷ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▷ soit vous jugez que la question comporte une ou plusieurs bonnes réponses :
sur la ligne correspondante, vous devez mettre une croix dans chacune des cases correspondants aux réponses que vous considérez comme justes ((a), (b), (c) ou (d) ou plusieurs d'entre elles).

▷ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées (a), (b), (c), (d) n'est correcte :
vous devez alors mettre une croix dans la case (e).

Traitez les questions dans l'ordre qui vous convient le mieux. Ne cherchez pas forcément à tout faire, mais à faire du mieux possible ce que vous décidez de faire.

Attention : toute réponse fausse entraîne une pénalité.

A vos marques ! Prêts ? Partez ! Et bon courage.

N'oubliez pas de rendre la grille-réponse à la fin de l'épreuve et d'y inscrire votre nom et votre classe !

– QCM 1 – Nombres complexes

Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a < 2\pi$. On pose :

$$z_1 = 1 + \cos a + i \sin a$$

$$z_2 = \sqrt{1 + \sin 2a} + i\sqrt{1 - \sin 2a}.$$

Question 1

On peut écrire $z_1 = 1 + e^{ia}$ donc pour tout a, le module $|z_1|$ de z_1 est

(a) strictement supérieur à 1. (b) inférieur ou égal à 1.

On peut écrire aussi $z_1 = 2e^{i\frac{a}{2}} \cos \frac{a}{2}$, soit pour tout a :

(c) $|z_1| = 2\cos\frac{a}{2}$. (d) $|z_1| = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right|$.

Question 2

On a, pour $0 \leq a < \pi$,

(a) $\sqrt{1 + \sin 2a} = \cos a + \sin a$. (b) $\sqrt{1 - \sin 2a} = \cos a\,(1 - \tan a)$.

On a, pour $\pi \leq a < 2\pi$,

(c) $\sqrt{1 + \sin 2a} = \cos a + \sin a$. (d) $\sqrt{1 - \sin 2a} = -\cos a\,(1 - \tan a)$.

Question 3

On en déduit que le module de z_2 est

(a) constant, pour tout a. (b) nul pour une certaine valeur de a.

On en déduit qu'un argument de z_2 est

(c) $\dfrac{\pi}{4} - a$, pour tout a. (d) $\dfrac{3\pi}{4} - a$, pour $\pi \leq a < 2\pi$.

Question 4

Posons $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

(a) Z n'existe pas pour certaines valeurs de a.

Dans le cas contraire, l'argument principal de Z, $\operatorname{Arg} Z$, vaut :

(b) $\dfrac{\operatorname{Arg} z_1}{\operatorname{Arg} z_2}$. (c) $2\operatorname{Arg} z_1$. (d) $\operatorname{Arg}\,(z_1\bar{z_2})$.

Question 5

Pour $0 \leq a \leq \pi$, on a :

(a) $|Z| = \sqrt{2}\cos\frac{a}{2}$. (b) $\operatorname{Arg} Z = \dfrac{3a}{2} + \dfrac{3\pi}{4}$.

Pour $\pi \leq a \leq 2\pi$, on a :

(c) $|Z| = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{a}{2}\right)$. (d) $\operatorname{Arg} Z = \dfrac{3a}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

– QCM 2 – Nombres complexes

On considère les équations dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$\bar{z}^2 - 2z + 1 = 0 \qquad (2).$$

Question 6

(a) (1) est une équation du second degré et admet deux solutions, distinctes ou non.

(b) Si z_0 est solution de (1), alors $\bar{z}_0$ est solution de (2).

(c) Si z_0 est solution de (1), alors z_0 est solution de l'équation du quatrième degré :
$z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = 0 \qquad (3).$

(d) (1) et (2) ont au moins une solution différente.

Question 7

L'équation (3) :

(a) admet 1 pour solution triple.

(b) n'admet que des solutions réelles.

(c) admet trois solutions distinctes.

(d) admet au moins une solution double.

Question 8

Des solutions de (1) sont

(a) -1.

(b) $-1 + i$.

(c) $-1 - 2i$.

(d) 1.

Bon courage !

Nom :		**Prénom :**		**Classe :**	

Devoir surveillé n° 0
Grille-réponse

– QCM 1 –

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

– QCM 2 –

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
6.					
7.					
8.					