

\* \* \*

L'usage des calculatrices est interdit.  
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

\* \* \*

**Exercice 1.**

1. Montrer qu'il existe un entier  $n_0$  non nul tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $3^n > n^2 + 2n + 100$ .
2. Soient  $a, b, c$  trois réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système d'inconnues  $(y, z, t)$  suivant possède une infinité de solutions :

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ z + at = 0 \\ y - z + bt = 0 \\ -y + ct = 0 \end{cases}$$

3. Soit  $a$  un réel n'appartenant pas à l'ensemble  $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Déterminer les réels  $\theta$  tels que

$$\frac{\sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \sin(4\theta)}{\cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cos(4\theta)} = \tan a.$$

4. Soient  $E$  un ensemble,  $m, n$  deux entiers naturels non nuls et  $(A_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  une famille de sous-ensembles de  $E$ . Montrer que

$$\bigcup_{i=1}^m \left( \bigcap_{j=1}^n A_{i,j} \right) \subset \bigcap_{j=1}^n \left( \bigcup_{i=1}^m A_{i,j} \right).$$

L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

**Problème.**

**Deux démonstration du théorème de Morley**

Le théorème de Morley est un théorème qui permet de fabriquer de la symétrie à partir de rien. Il a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : *Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral.*

**Notations**

On travaille dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Si  $O, A$  et  $B$  sont trois points du plan (avec  $A$  et  $B$  distincts de  $O$ ), on note  $\widehat{AOB}$  l'angle géométrique saillant (mesuré dans  $[0, \pi]$ ) délimité par les demi-droites  $[OA)$  et  $[OB)$ . Par abus de notation, on note encore  $\widehat{AOB}$  la mesure en radians de l'angle  $\widehat{AOB}$ .

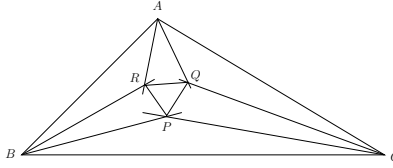
Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan passant par  $O$ . On dira que  $\mathcal{D}$  est une trisectrice de l'angle géométrique  $\widehat{AOB}$  si et seulement s'il existe un point  $M$  de  $\mathcal{D}$ , distinct de  $O$ , tel que  $\widehat{AOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$  ou  $\widehat{BOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$  (de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices).

La distance entre deux points  $A$  et  $B$  est notée  $AB$ .

Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nul, celle qui appartient à l'intervalle  $] -\pi, \pi]$ . Le complexe égal à  $e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est noté  $j$ .

On considère un triangle non plat  $ABC$  que l'on suppose direct c'est-à-dire tel que la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  soit comprise strictement entre 0 et  $\pi$ . On note  $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$  les mesures principales respectives des angles orientés  $(\vec{AB}, \vec{AC})$ ,  $(\vec{BC}, \vec{BA})$  et  $(\vec{CA}, \vec{CB})$ ; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle  $]0; \pi[$ .

On note  $P, Q, R$  les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets adjacents  $B$  et  $C$ ,  $C$  et  $A$ ,  $A$  et  $B$ , tels que définis par la figure ci-dessous.



**Partie A : Une démonstration (datant de 1996) de D. J. Newman**

**1. La relation des sinus.** Soient  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit et  $r$  le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . On note  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ . On admettra dans la suite relation dite des sinus :  $\frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin 3\beta} = \frac{c}{\sin 3\gamma} = 2r$ .

- a) En appliquant la relation des sinus aux triangles  $ABR$  et  $ABC$ , montrer que  $AR = 2r \sin \beta \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ .
- b) Soit  $\theta$  un nombre réel. Exprimer  $\sin(3\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .
- c) Montrer que  $4 \sin \gamma \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) = \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ .
- d) Montrer que  $AR = 8r \sin \beta \sin \gamma \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma)$ .
- e) En déduire que  $AQ = 8r \sin \beta \sin \gamma \sin(\frac{\pi}{3} + \beta)$ .

**2. Relations angulaires.** On considère le point  $M$  de la demi-droite  $[AQ)$  vérifiant  $\widehat{ARM} = \frac{\pi}{3} + \beta$ .

- a) Calculer  $\widehat{AMR}$ .
  - b) En appliquant la relation des sinus dans le triangle  $ARM$ , montrer que  $AM = AQ$ .
  - c) En déduire les valeurs des angles  $\widehat{ARQ}$  et  $\widehat{AQR}$ .
- 3.** Montrer que  $RQ = 8r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .
- 4.** Conclure.

**Partie B : Une démonstration (datant de 1998) d'Alain Connes**

On note  $P'$ ,  $Q'$  et  $R'$  les symétriques des points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  respectivement par rapport aux droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ , et  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport à la droite  $(BC)$ .

On appelle  $f$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $2\alpha$ ,  $g$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $2\beta$  et  $h$  la rotation de centre  $C$  et d'angle  $2\gamma$ .

**5.** On considère trois points  $A_1, A_2, A_3$  du plan complexe d'affixes respectifs  $a_1, a_2, a_3$ . Prouver que le triangle  $A_1A_2A_3$  est équilatéral, avec l'angle orienté  $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$  de mesure principale égale à  $\frac{\pi}{3}$ , si et seulement si  $a_1 + ja_2 + j^2a_3 = 0$ .

**6. Remarques préliminaires.**

- a) Calculer la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'})$ .
- b) Montrer que  $P$  est un point fixe de la transformation  $g \circ h$ , c'est-à-dire que  $g(h(P)) = P$ .

**7. Quelques calculs numériques.**

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$  et  $\varphi$  une transformation du plan. Par abus de langage on note encore  $\varphi(z)$  l'affixe du point  $\varphi(M)$ .

a) Justifier l'existence de six nombres complexes  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$  :  $f(z) = a_1z + b_1$ ,  $g(z) = a_2z + b_2$  et  $h(z) = a_3z + b_3$ .

- b) Calculer le produit  $a_1a_2a_3$ .
- c) Exprimer les nombres complexes  $p, q, r$  en fonction des nombres complexes  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ .

**8.** On note  $f^3$  (resp.  $g^3, h^3$ ) l'application  $f \circ f \circ f$  (resp.  $g \circ g \circ g, h \circ h \circ h$ ).

- a) Prouver que  $f^3 \circ g^3 \circ h^3$  est une translation notée  $\tau$ .
- b) Déterminer géométriquement l'image du point  $A$  par la translation  $\tau$ .

**9.** On admet que des calculs simples donnent

$$f^3 \circ g^3 \circ h^3(0) = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3.$$

$$p + jq + jr = -j^2 \frac{a_3 [(a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3]}{a_1(1 - a_2a_3)(1 - a_3a_1)(1 - a_1a_2)}.$$

Démontrer le théorème de Morley dans le cas d'un triangle  $ABC$  direct.