* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

* * *

**Exercice 1. (Autour de la fonction cotangente)** On rappelle que :

* la fonction cotangente est définie par le rapport $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.

* Soient $n$ est un entier naturel et $P(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré $n$, où $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Le polynôme $P$ possède au plus $n$ racines et si $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les racines du polynôme $P$, alors $P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - \zeta_k)$.

**1. Étude de fonction.**

**a)** Déterminer le domaine de définition puis la parité de la fonction cotan.

**b)** Déterminer le domaine de dérivabilité puis la valeur de la dérivée de la fonction cotan.

**c)** En déduire le tableau de variations de la fonction cotan sur $]-\pi, \pi[$, puis sa représentation graphique.

**2.** Identifier les fonctions $f$ à valeurs réelles deux fois dérivables telles que $y'' - 2y = 2\,\text{cotan}^3 x$ sur $]0, \pi[$ telles que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

**3. Quelques formules trigonométriques.** Soient $x$, $y$ deux réels.

**a)** Exprimer $\text{cotan}(x+y)$ en fonction de $\text{cotan}\, x$ et $\text{cotan}\, y$, lorsque ces quantités sont définies.

**b)** Exprimer $\text{cotan}\, x - 2\,\text{cotan}(2x)$ en fonction de $\tan x$, lorsque ces quantités sont définies.

**4. Bijection réciproque.**

**a)** Justifier l'existence d'une bijection réciproque de la fonction cotangente à valeurs dans $]0, \pi[$. Préciser son domaine de définition et sa monotonie. Celle-ci sera notée acotan.

**b)** Préciser le domaine de définition et la valeur de la dérivée de la fonction acotan.

**c)** Pour tout $x \in ]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, déterminer les valeurs $\text{cotan}(\text{acotan}(x))$ et $\text{acotan}(\text{cotan}(x))$.

**d)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sin \text{acotan}(x)$.

**5. Calcul d'un produit.** Dans toute la suite, $n$ désigne un entier naturel non nul et $x$ un réel positif n'appartenant pas à l'ensemble $\{\frac{k\pi}{n}, k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$.

**a)** Pour tout nombre complexe $\lambda = e^{2inx}$ de module 1, déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $(z-1)^n - \lambda(1+z)^n = 0$.

**b)** En déduire, en fonction de la parité de $n$, la valeur de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \text{cotan}\left(x + \frac{k\pi}{n}\right).$$

**6. Calcul d'une somme.**

Soit $m$ un entier naturel et $x$ un réel.

**a)** Montrer que

$$\sin\{(2m+1)x\} = (\sin x)^{2m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\text{cotan}\, x)^{2m-2k}.$$

**b)** On considère le polynôme : $P_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{m-k}$.

Déterminer le terme de plus haut degré de $P_m$ puis démontrer que l'ensemble des racines de $P_m$ est $\left\{\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1},\, k \in [\![1, m]\!]\right\}$.

**c)** En déduire que

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

**d)** En définissant la fonction cosécante par $\csc = \frac{1}{\sin}$, en déduire que $\sum\limits_{k=1}^{m} \csc^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+2)}{3}$.

**e)** Montrer que pour tout $y \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\operatorname{cotan}^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$.

**f)** En déduire un encadrement de $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$.

**g)** Conclure en montrant que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)_{m\in\mathbb{N}^\star}$ converge et préciser sa limite.

**Problème. (Étude d'un ensemble de nombres complexes)** Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et pour $n \geq 2$, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-èmes de l'unité.
Pour tous nombres complexes $z$, $z'$, on note $d(z, z') = |z - z'|$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, on note $\arg(z)$ un argument de $z$ défini à $2\pi$-près et $\arg(z)$ l'unique argument qui appartient à $[0, 2\pi[$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = e^{ni\theta}$ et on considère l'ensemble $V = \{z_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
**1.** Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. Exprimer $d(e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ sans radicaux et en fonction de $\frac{\theta-\theta'}{2}$.
**2.** On suppose dans cette question que $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ et on note $A = \{n \in \mathbb{N}^\star \;;\; z_n = 1\}$.

**a)** Montrer que $A$ est un ensemble non vide. On admettra qu'il existe un entier $n_0 \in A$ tel que pour tout $n \in A$, $n \geq n_0$.

**b)** Montrer que $z_0, \ldots, z_{n_0-1}$ sont des nombres complexes tous distincts.

**c)** En déduire que $V = \mathbb{U}_{n_0}$, ou $V$ est réduit à un point.

On suppose dans toute la suite que $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Q}$.
**3.** Montrer que l'application $n \mapsto z_n$ est injective.
**4.** Soit $z \in \mathbb{U}$ et $\varepsilon > 0$. On désire établir qu'il existe un entier $m$ tel que $d(z_m, z) \leq \varepsilon$.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ tel que $\frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose

$$A_k = \{z \in \mathbb{U} \;;\; \tfrac{k2\pi}{n} \leq \arg(z) < (k+1)\tfrac{2\pi}{n}\}.$$

**a)** Montrer que la famille $(A_k)_{0\leq k\leq n-1}$ forme une partition de $\mathbb{U}$.

**b)** Montrer que, parmi les éléments $z_0, \ldots, z_n$, au moins deux se trouvent dans un même $A_k$.

On note $p$ et $q$ leurs indices et on pose $\varphi = \arg(z_p)$, $\psi = \arg(z_q)$. On suppose que $\varphi < \psi$.

**c)** Montrer que $\psi - \varphi \in ]0, \frac{2\pi}{n}]$.

**d)** Montrer que $\arg(z_{q-p}) = \psi - \varphi$.

**e)** On note $\alpha = \arg(z)$ et on pose $k$ le plus grand entier tel que $k(\psi - \varphi) \leq \alpha$. Montrer que $d(z, z_{k(q-p)}) \leq 2\sin\frac{\psi-\varphi}{2}$.

**f)** Conclure.