* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction et au tracé des courbes.

* * *

Exercice 1. (Étude d'un système différentiel) On considère le système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) - y(t) = t \\ y'(t) - x(t) = -t^2 \end{array}\right., \qquad (\mathcal{S})$$

où x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si x et y sont des solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$, alors elles sont deux fois dérivables.

2. En se ramenant à des équations différentielles d'ordre 2, résoudre le système différentiel homogène

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{array}\right. . \qquad (\mathcal{H})$$

3. Déterminer une solution particulière du système $(\mathcal{S})$.

4. Solutions générales.

a) Déduire des questions précédentes, en justifiant précisément votre démarche, l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$.

b) Déterminer la solution (x_0, y_0) du système $(\mathcal{S})$ satisfaisant $x_0(0) = 1$ et $y_0(0) = 0$.

c) On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Donner les caractéristiques puis tracer la courbe paramétrée de représentation paramétrique $(x_0(t), y_0(t))$.

Exercice 2. (Introduction aux matrices d'ordre 2**)** On appelle matrice carrée d'ordre 2 les éléments de l'ensemble

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}.$$

On dit que deux matrices $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ sont égales et on notera $A_1 = A_2$, si et seulement si $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ et $d_1 = d_2$. On note également $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour A_1, $A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit

* $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$.

* $A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$.

1. En `Python`, on représente une matrice d'ordre 2 comme une liste de listes. Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sera représentrée par la liste `[[a,b],[c,d]]`. Écrire, en `Python`, une fonction `produit(A,B)` qui, étant données deux matrices `A` et `B`, retourne la matrice produit `A` $\times$ `B`.

2. Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe abélien.

Dans toute la suite, on pose $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Quelques calculs autour de la loi $\times$.

a) Calculer $A_1 \times A_2$ et $A_2 \times A_1$.

b) Pour tout entier naturel non nul n, calculer A_1^n et A_2^n.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer R_θ^n.

d) On admettra par la suite que la loi $\times$ est associative. La loi $\times$ est-elle commutative ?

e) Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.

f) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est-il un corps ? (votre réponse devra être argumentée)

4. Un dernier calcul. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Montrer qu'il existe trois réels a_n, b_n, c_n tels que $(A_1 + A_2)^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & c_n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les valeurs de a_n et c_n.

Problème. (Quelques propriétés de la cardioïde) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans tout ce problème, a désigne un réel strictement positif. Soit Γ la cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$. On désigne par M_θ le point de Γ de paramètre θ, autrement dit le point de coordonnées polaires $(a(1+\cos\theta), \theta)$.

1. Simplifier pour $\theta \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes.

a) $A = e^{i\theta} + e^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})} + e^{i(\theta - \frac{2\pi}{3})}$.

b) $B = e^{2i\theta} + e^{2i(\theta + \frac{2\pi}{3})} + e^{2i(\theta - \frac{2\pi}{3})}$.

2 . a) Étudier et construire la courbe Γ.

b) Calculer l'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{V_\theta}})$, où $\overrightarrow{V_\theta}$ désigne le vecteur vitesse au point M_θ.

c) Donner une équation normale de la tangente $\mathcal{T}_\theta$ à Γ en un point M_θ.

3 . a) Quels sont les points de Γ à tangente verticale ? horizontale ?

b) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et Δ_φ la droite qui passe par 0 et forme un angle φ avec l'axe des abscisses. Montrer que Γ admet trois tangentes parallèles à Δ_φ. On note M_{θ_1}, M_{θ_2} et M_{θ_3} les trois points de contact.

c) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G du triangle $M_{\theta_1}M_{\theta_2}M_{\theta_3}$. Vérifier que l'affixe de G est indépendante de φ. Placer le point G sur le graphe de la cardioïde.

d) Montrer que l'aire du triangle $M_{\theta_1}M_{\theta_2}M_{\theta_3}$ est constante et vaut $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$.

e) Soit I le milieu de $[M_{\theta_2}M_{\theta_3}]$. Montrer que I est le barycentre de M_{θ_1} et G pondérés de coefficients que l'on précisera. En déduire le lieu des points I lorsque M_{θ_1} parcourt la cardioïde Γ.

4 . a) Déterminer les coordonnées du symétrique Ω de O par rapport à la tangente $\mathcal{T}_\theta$.

b) Déterminer une équation polaire du lieu Ψ des points Ω lorsque M_θ parcourt Γ.

c) Étudier et construire la courbe Ψ.

5. La droite Δ_φ (qui passe par O) rencontre Γ en deux points P et Q autres que O. On note A le point d'affixe 2.

a) Montrer que les tangentes à Γ en P et Q sont perpendiculaires. Donner les équations normales de ces deux tangentes et déterminer leur point d'intersection R.

b) Montrer que lorsque P parcourt la cardioïde Γ, R décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.