* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la précision de la rédaction.

* * *

Exercice 1. (Étude d'un équivalent)

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e^{n} < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

3. En déduire que $(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. On pose pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

1 . a) Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont deux suites croissantes.

b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer T_n en fonction de S_n et de u_{n+1}.

c) En déduire que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente, alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{v_k}{k}$.

a) Montrer que la suite $(R_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et convergente et déterminer sa limite.

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $nu_n = \lim\limits_{p\to+\infty} n(R_p - R_{n-1})$.

c) Montrer que pour tous entiers $p \geq n \geq 2$, $n(R_p - R_{n-1}) \leq T_p - T_{n-1}$.

d) On suppose que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge. Montrer que $\lim\limits_{n} nu_n = 0$ puis que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est divergente si et seulement si la suite $(T_n)_{n\geq 1}$est divergente.

4. On suppose que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.

Problème. (Développement asymptotique d'une suite définie par récurrence)

Résultats préliminaires

1. Démontrer le théorème de Cesaro : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle convergente vers un réel α. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers α.

2. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose pour tout entier naturel n, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Montrer que $S_n \sim T_n$.

Étude d'une application linéaire

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit $f : E \to E$ qui à toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $f(a) = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $\alpha_n = a_n + 2a_{n+1}$.

4 . a) Soit ω la suite nulle. Déterminer $f(\omega)$.

b) Montrer que pour toutes suites a, $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(a + \lambda b) = f(a) + \lambda f(b)$.

c) Déterminer $\operatorname{Ker} f = \{a \in E \ ; \ f(a) = \omega\}$. On notera $H = \operatorname{Ker} f$.

5 . a) Soit $F = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \ ; \ a_0 = 0\}$. Soit $g : F \to E$, $a \mapsto f(a)$. Montrer que g est bijective.

b) Soit $\alpha \in E$ et $a = g^{-1}(\alpha)$. Pour tout entier naturel n, déterminer a_n en fonction de n et des $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

c) Soit $a \in F$ et $\alpha = g(a)$. Montrer que si α converge vers 0, alors a converge vers 0.

6 . a) Soient $\alpha \in E$, $H_\alpha = f^{-1}(\{\alpha\})$ et $a = g^{-1}(\alpha)$. Montrer que $H_\alpha = a + H = \{a + u,\ u \in H\}$.

b) Soient $\alpha \in E$ une suite convergeant vers 0 et b telle que $f(b) = \alpha$. Montrer que b est convergente et déterminer sa limite.

c) Soient ℓ un réel et u la suite constante égale à ℓ. Déterminer $f(u)$.

d) Soient α une suite de E de limite réelle ℓ et b telle que $f(b) = \alpha$. On note $\widetilde{b} = (b_n - \frac{\ell}{3})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $f(\widetilde{b}) = (\alpha_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite b converge vers une limite à déterminer.

Études asymptotiques

On étudie la suite u définie par récurrence par

$$u_0 = u_1 = \frac{3}{2},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis déterminer sa limite.

8. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{3} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1$.

9. Soient $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha = f(v)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n = 2 - (\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}})^2$.

b) Montrer que la suite α est convergente et déterminer sa limite.

c) En déduire la limite de la suite v.

10 . a) Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$.

b) On rappelle que $\alpha = f(v)$. Déterminer un équivalent à l'infini de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire que $u_n \sim \frac{2n}{3}$.

11. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $w_n = \alpha_n - 2$. Donner un équivalent à l'infini de $(w_n)_{n\geq 2}$.

12. Soit $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $b_n = u_n - \frac{2n}{3}$ et $\beta = f(b)$.

a) Montrer que $\beta_n \sim -\frac{1}{6} \ln n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_{n+1} - b_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

c) Déterminer un équivalent à l'infini de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer qu'il existe un réel λ (à déterminer) tel que $u_n = \frac{2n}{3} + \lambda \ln n + o(\ln n)$.