* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la précision de la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. (Fonctions logarithmiquement convexes) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles strictement positives. On dit que f est logarithmiquement convexe si $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.

2. Caractérisation des fonctions logarithmiquement convexes. On notera, pour tout réel $c > 0$, $\varphi_c \ : \ I \to \mathbb{R}_+^\star$, $x \mapsto f(x)c^x$.

a) Montrer que si f est logaritmiquement convexe, alors pour tout $c > 0$, φ_c est convexe.

b) Soit $c > 0$. On suppose que φ_c est convexe. Montrer que pour tous a, $b \in I$, $\lambda \in [0, 1]$, il existe un réel α tel que

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}.$$

c) En choisissant judicieusement α dans la question précédente, montrer que si φ_c est convexe pour tout $c > 0$, alors f est logarithmiquement convexe.

3. Soient f, $g \ : \ I \to \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que si f et g sont logarithmiquement convexes, alors $f + g$ est logarithmiquement convexe.

Exercice 2. (Une équation fonctionnelle) Soit g un application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g \circ g(x) = 2g(x) - x.$$

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.

a) Montrer que s'il existe trois réels $x < y < z$ tels que $f(x) \geq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$, alors f n'est pas injective.

b) En déduire que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et bijective est strictement monotone.

2. Propriétés élémentaires.

a) Montrer que g est une fonction injective.

b) Montrer que $g \circ g$ puis g sont des fonctions strictement croissantes.

c) En déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On notera g^{-1} sa bijection réciproque.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $g^{-1}(x) = 2x - g(x)$ puis que $g^{-1} \circ g^{-1}(x) = 2g^{-1}(x) - x$.

3. On note $g^{(n)}$ l'itérée n-ème de g, i.e. $g^{(0)} = \mathrm{Id}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} = g^{(n-1)} \circ g$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $\frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{n} = g(x) - g(0) - \frac{(n-1)}{n}x$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $g(x) - g(0) - x \geq 0$ puis que pour tout $x \leq 0$, $g(x) - g(0) - x \leq 0$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $g^{-1}(x) - g^{-1}(0) - x \geq 0$.

4. Déduire des questions précédentes que g est une fonction affine.

Problème. Pour tout entier naturel p, on considère la fonction A_p définie pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ par $A_p(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. Dans ce problème, on établit la convergence de la suite (x_n) définie par $A_{2n-1}(x_n) = 0$.

Algorithme d'approximation de la solution d'une équation

On note $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-1-t}$. On étudie une approximation de la solution de l'équation $f(t) = t$.

1. Propriétés de f.

a) Montrer que la fonction f possède un unique point fixe noté α. On admettra que $\alpha \leq e^{-1}$.

b) Montrer que pour tous réels positifs x, y, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{e}$.

c) Montrer que l'intervalle $I = [0, \frac{1}{e}]$ est stable par f, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

2. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pout tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que la suite u est bien définie.

b) Déduire des questions précédentes que la suite u converge vers α.

Étude de suites

Soient v et w les suites définies pour tout $n \geq 1$ par $v_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ET $w_n = \frac{n^n}{n!}$.

3. Déterminer une relation simple entre $\ln v_n$ et $\ln w_n$.

4 . a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

b) En déduire que si $n \geq 6$, alors $w_n \geq 2^n$.

c) Déterminer un majorant de la suite v.

5. Convergence de la suite v.

a) Déterminer la limite de la suite $(\ln w_{n+1} - \ln w_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$.

b) Montrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \ln(1 + x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq 1 + \ln w_n - \ln w_{n+1} \leq \frac{1}{2n}.$$

d) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $x \leq -\ln(1 - x)$.

e) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$.

f) Prouver finalement que la suite $\left(\frac{1}{n} \ln w_n\right)$ converge. En déduire que la suite v converge et déterminer sa limite.

Étude de la suite (x_n)

On admettra que pour tout nombre entier naturel p et pour tout nombre réel positif x, $e^{-x} = A_p(x) + (-1)^{p+1} I_p(x)$, où $I_p(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} \frac{(x-t)^p}{p!} \, dt$.

6. Définition de la suite (x_n).

a) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel positif x, $A_{2n+1} \leq e^{-x} \leq A_{2n}(x)$.

b) Exprimer A'_{p+1} en fonction de A_p.

c) Prouver que pour tout nombre entier naturel non nul n, l'équation $A_{2n-1}(x) = 0$ admet une unique solution notée x_n.

d) Calculer $A'_{2n}(x_n)$ et dresser le tableau de variations de A_{2n-1} et A_{2n}.

7. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que $A_{2n}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}$ et $A_{2n+1}(x_n) = \frac{x_n^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x_n}{2n+1}\right)$.

b) En déduire que $\frac{x_n^{2n}}{(2n)!} \leq 1$. Montrer que si $n \geq 3$, $x_n \leq n$. Vérifier que ce résultat reste valable lorsque $n = 1, 2$.

c) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

8. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que $1 \leq \frac{x_n^{2n}}{(2n)!} e^{x_n} \leq 2$.

b) On pose $y_n = \frac{x_n}{2n}$. Montrer que

$$v_{2n} \leq y_n e^{y_n} \leq 2^{\frac{1}{2n}} v_{2n}.$$

c) En déduire que la suite $(y_n e^{y_n})$ converge vers $\frac{1}{e}$.

d) En conclure que la suite (y_n) converge vers α.