* * *

L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la précision de la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit U_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes unitaires de degré n. Plus précisément, un polynôme P de U_n s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n = 1$.

On définit l'application $\varphi_n : \mathbb{R}^n \to U_n$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \varphi_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k}$ par

$$\begin{aligned} \sigma_{n,0} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto 1, \\ \sigma_{n,k} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}. \end{aligned}$$

Partie I : Méthode de Newton pour les équations polynomiales

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et P est un polynôme appartenant à U_n dont toutes les racines sont réelles. On suppose que P a au moins deux racines réelles distinctes et on note $\lambda_1 > \cdots > \lambda_p$ les racines réelles de P avec p un entier compris entre 2 et n. Pour tout entier j compris entre 1 et p, la racine λ_j est de multiplicité m_j supérieure ou égale à 1 avec $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$.

1 . a) Montrer que le polynôme dérivé P' admet les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ pour racines de multiplicités $m_1 - 1, \ldots, m_p - 1$ (une multiplicité nulle signifie que λ_j n'est pas racine de P') et des racines simples $\mu_i \in]\lambda_{j+1}, \lambda_j[$ avec $1 \leq j \leq p-1$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à λ_1 et tout entier k compris entre 0 et n, on a $P^{(k)}(x) > 0$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P.

2. On définit la fonction $g : [\lambda_1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x - \frac{P(x)}{P'(x)} & \text{si } x > \lambda_1, \\ \lambda_1 & \text{si } x = \lambda_1. \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g est indéfiniment dérivable sur $[\lambda_1, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > \lambda_1$, $\lambda_1 < g(x) < x$.

Pour toute la fin de cette partie, b désigne un réel strictement supérieur à λ_1. On définit alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = b$ et pour tout $k \geq 0$, $x_{k+1} = g(x_k)$.

c) Montrer que cette suite converge en décroissant vers λ_1.

d) Montrer que

$$\forall\, x > \lambda_1,\ 1 - g'(x) = \frac{\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\lambda_j)^2}}{\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2}.$$

e) Montrer que

$$\forall\, x > \lambda_1,\ \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2 \leq n \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\lambda_j)^2}.$$

f) Déduire de ce qui précède que

$$\forall\, x > \lambda_1,\ 0 < g'(x) \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

g) On suppose qu'on a trouvé un réel a inférieur ou égal à λ_1. Déduire de la question précédente une majoration de $|x_k - \lambda_1|$ pour tout entier k strictement positif en fonction de a, b, n et k.

Partie II : Quelques propriétés des fonctions symétriques élémentaires

3 . a) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On lui associe $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Exprimer, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\sigma_{n,k}(\lambda)$ en fonction de λ_n et des $\sigma_{n-1,j}(\lambda')$ pour $0 \leq j \leq n-1$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif, on a

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k}.$$

4. Soient n un entier strictement positif, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec λ_k non nul pour tout entier k compris entre 1 et n et $P = \varphi_n(\lambda)$ avec $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n = 1)$.

a) Montrer que a_0 est différent de 0.

On désigne par Q le polynôme de degré n à coefficients réels défini pour x réel non nul par $x \mapsto Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) En écrivant $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$, exprimer les coefficients b_k $(0 \leq k \leq n)$ en fonction des coefficients a_j $(0 \leq j \leq n)$.

c) Déterminer δ appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $\frac{1}{a_0} Q = \varphi_n(\delta)$.

d) Montrer que

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \sigma_{n,k}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \frac{\sigma_{n,n-k}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}.$$

5. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ et $P = \varphi_n(\lambda)$.

a) Montrer qu'il existe μ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\frac{1}{n} P' = \varphi_{n-1}(\mu')$.

b) Montrer que

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k} \sigma_{n-1,k}(\mu').$$

6. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

a) En étudiant le trinôme $\sum\limits_{i=1}^{n} (X + \lambda_i)^2$, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

b) Montrer que $(n-1)(\sigma_{n,1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,2}(\lambda) \geq 0$.

 A. Camanes

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un élement de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$(n-1)(\sigma_{n,n-1}(\lambda))^2 - 2n\sigma_{n,n-2}(\lambda)\sigma_{n,n}(\lambda) \geq 0.$$

(on distinguera le cas où l'un des λ_i est nul du cas où tous les λ_i sont non nuls.)

8. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!],\ (\sigma_{n,k}(\lambda))^2 - \frac{n-k+1}{n-k} \cdot \frac{k+1}{k} \sigma_{n,k-1}(\lambda)\sigma_{n,k+1}(\lambda) \geq 0.$$

Partie III : Un résultat de continuité des racines d'un polynôme comme fonction des coefficients

Pour cette partie, n est un entier strictement positif et P désigne un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant n racines réelles distinctes : $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$.

9. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que les intervalles $I_k = [\lambda_k - r, \lambda_k + r]$ $(1 \leq k \leq n)$ soient deux à deux disjoints.

Pour $T = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\|T\| = \sup\{|\alpha_k|,\, k \in [\![0, n]\!]\}$.

10. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et n, on peut trouver des réels a_k et b_k appartenant à I_k tels que $P(a_k)P(b_k) < 0$.

11. On note $[a, b] = [\lambda_n - r, \lambda_n + r]$ et $\alpha = \min\{|P(a_1)|, \ldots, |P(a_n)|, |P(b_1)|, \ldots, |P(b_n)|\}$.

a) Montrer qu'il existe un réel β strictement positif tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sup_{x \in [a,b]} |Q(x)| \leq \beta \|Q\|$.

b) Soit Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|Q - P\| < \frac{\alpha}{\beta}$. Montrer que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k)Q(b_k) < 0$ puis que le polynôme Q a n racines réelles.

Partie IV : Inégalités de Newton

12. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de U_n admettant n racines réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. En utilisant les résultats de la partie II, montrer les inégalités de Newton :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!],\ a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\frac{k+1}{k} a_{k-1}a_{k+1} \geq 0.$$

13. Étude d'un exemple. Soient a un réel et P le polynôme $P(X) = X^5 + 5aX^3 + a^2X + 1$.

a) Montrer que si P a 5 racines réelles, alors a est négatif.

On suppose pour toute la fin de cette question que a est strictement négatif.

b) Montrer que les inégalités de Newton sont vérifiées.

On pose $a = -\frac{1}{b^2}$ avec b strictement positif et $R(X) = X^5 - 5X^3 + X + b^5$, $S(X) = X^5 - 5X^3 + X$.

c) Montrer que P a 5 racines réelles si et seulement si R a 5 racines réelles.

d) Montrer que le polynôme dérivé S' a 4 racines réelles $-\alpha_1 < -\alpha_2 < \alpha_2 < \alpha_1$ et que $S(\alpha_2) < S(-\alpha_1)$.

e) En étudiant les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto S(x)$, montrer que P a 5 racines réelles distinctes si et seulement si $a < -\frac{1}{(S(\alpha_2))^{2/5}}$.

A. Camanes