* * *

L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la précision de la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. (Les polynômes de Hilbert) Nous noterons $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Soit φ l'application qui, à un polynôme à coefficients réels P, fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ défini par la relation $\varphi(P)(X) = P(X+1) + P(X)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de φ s'il existe un polynôme non nul P_λ tel que $\varphi(P_\lambda) = \lambda P_\lambda$. Si λ est une valeur propre de φ, l'espace $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]})$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

a) Déterminer les valeurs propres de φ.

b) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

3. Soit n un entier naturel.

a) Déterminer le noyau de φ.

b) Démontrer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n est stable par φ.

c) Montrer que la restriction φ_n de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un automorphisme.

d) Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

4. Nous noterons E l'unique sous-espace propre identifié à la question **2.b**.

a) Démontrer que $\mathbb{R}[X]$ est égal à la somme directe du sous-espace vectoriel E et du sous-espace vectoriel $X\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes égaux au produit du polynôme X et d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que la restriction de $\varphi - 2\,\mathrm{Id}$ à $X\mathbb{R}[X]$ est une application injective. En déduire que la restriction de $\varphi - 2\,\mathrm{Id}$ à $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est une application bijective à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) En déduire qu'il existe une suite de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifiant $U_0 = 1$ et pour tout entier non nul n, $U_n(0) = 0$, $U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X)$. Pour tout entier naturel n, préciser le degré et le terme dominant de U_n.

d) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p+1 \leq n$. Calculer $U_n(p)$. En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$ du polynôme U_n.

e) Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(U_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème. (π et des intégrales)

Préliminaires : Relations de comparaison et limites d'intégrales

1. Soit α un réel strictement positif. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la fonction $f_\alpha\ :\ [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ admette une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soient f, g deux fonctions continues définies de $[1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On définit les fonctions $G : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x g(t)\, dt$ et $F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$.

a) On suppose que $f = o_{+\infty}(g)$. Montrer que si G admet une limite finie en $+\infty$, alors F admet une limite finie en $+\infty$.

b) On suppose que $f \sim_{+\infty} g$. Montrer que G admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si F admet une limite finie en $+\infty$.

Partie I : L'intégrale de F. Gauss

3. Montrer que la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons $\ell = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$. Ces intégrales sont appelées intégrales de Wallis.

a) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+2}.

b) En déduire la valeur de I_{2n} et I_{2n+1}.

c) Montrer que $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$.

d) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ puis un équivalent simple de I_{2n} lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}[$, $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.

b) Exprimer l'intégrale $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ en fonction d'une intégrale de Wallis.

6. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

b) Montrer qu'il existe un réel $B \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et un entier naturel p tels que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^B \cos^{2p}(t)\, dt$.

7. En déduire que $\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8. Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est lipschitzienne sur $[0, x]$.

b) En déduire une méthode d'approximation de l'intégrale $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ dont vous préciserez une majoration du terme d'erreur.

c) En supposant l'existence d'une fonction `exp` qui calcule la valeur de l'exponentielle, écrire un programme `Python` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur approchée de $\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ à 10^{-n} près.

Partie II : La formule de S. Plouffe

9. Soient a un réel appartement à l'intervalle $[0, 1[$ et p, m deux entiers naturels. On suppose que p est non nul.

a) Pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, simplifier l'expression $\sum_{k=0}^{N} x^{m-1+kp} - \frac{x^{m-1}}{1-x^p}$.

b) En déduire que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{a^{kp}}{m+kp} = \frac{1}{a^m} \int_0^a \frac{x^{m-1}}{1-x^p}\, dx$.

10. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)=16\int_0^1\frac{u-1}{u^4-2u^3+4u-4}\,du.$$

11. En déduire que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)=\pi.$$