* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la précision de la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. (Étude d'une courble plane) Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t) \ : \ \begin{cases} x(t) &= 2\cosh(t) \\ y(t) &= 3\sinh(t) \end{cases}$.

1. Montrer que Γ est une portion de conique dont on précisera la nature et l'excentricité.

2. Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ. Tracer proprement, sur une feuille séparée, la courbe Γ et ses asymptotes.

3. Étude métrique.

a) Déterminer le repère de Frenet $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

b) Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

c) On définit le centre de courbure $C(t)$ au point $M(t)$ par la relation $\overrightarrow{OC(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + R(t) \cdot \overrightarrow{N(t)}$. Déterminer les coordonnées du centre de courbure $C(t)$.

4. On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t) \ : \ \begin{cases} x(t) &= \frac{13}{2}\cosh^3(t) \\ y(t) &= -\frac{13}{3}\sinh^3(t) \end{cases}$.

a) Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.

b) Étudier la coubre Γ' au point $C(0)$.

c) Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.

d) Tracer la courbe Γ' sur le même graphique que la courbe Γ.

e) Calculer la longueur de l'arc de Γ' correspondant à $0 \leq t \leq 1$.

Problème. (Racines carrées de matrices) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que B est une racine carrée de A lorsque $B^2 = A$.

Partie I : Étude de cas particuliers

1. On suppose dans cette question que $n = 2$. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. On pose $E_1 = \text{Vect}\{e_1 + 2e_2\}$ et $E_2 = \text{Vect}\{e_1 - 2e_2\}$.

a) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

b) Déterminer la matrice M, dans la base $\mathcal{B}$, de la symétrie vectorielle par rapport à E_1 et de direction E_2.

c) En déduire que I_2 possède une infinité de racines carrées.

2. On suppose dans cette question que $n = 3$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle qu'un réel λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. On note φ l'endormorphisme canoniquement associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la matrice A possède trois valeurs propres $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ que vous identifierez.

b) On note φ l'endormorphsime canoniquement associé à A. Pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, on note $E_i = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \operatorname{Id})$.

c) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ soit diagonale.

d) Montrer que A possède une racine carrée que vous identifierez.

3. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$ par $a_{ij} = \delta_{i,i+1}$, où δ désigne le symbole de Kronecker. On suppose que B est une racine carrée de A et on note φ_A et φ_B les endomorphismes canoniquement associés à A et B. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi_A$ et $\operatorname{Im} \varphi_A$.

b) Montrer que $\varphi_B(e_1)$ est le vecteur nul.

c) Déterminer $\dim \operatorname{Im} \varphi_B$.

d) Montrer que la restriction de Φ de φ_B à $\operatorname{Im} \varphi_B$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} \varphi_B$.

e) Déterminer φ_B^{2n}.

f) Montrer que A n'a pas de racine carrée.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On veut montrer que $-I_4$ possède des racines carrées. On considère une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui soit une racine carrée de $-I_4$ (on suppose que $-I_4$ possède au moins une racine carrée). Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à B.

a) Soit x_0 un élément non nul de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $(x_0, \varphi_B(x_0))$ est une famille libre.

b) Montrer qu'il existe un vecteur x_1 de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}\{x_0, \varphi_B(x_0)\}$.

c) Montrer que $\mathcal{B}' = (x_0, \varphi_B(x_0), x_1, \varphi_B(x_1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

d) Déterminer la matrice C de φ_B dans la base $\mathcal{B}'$.

e) Conclure.

5. On suppose dans cette question que $n = 3$. Montrer que $-I_3$ ne possède pas de racine carrée.

Partie II : Quelques généralisations

Dans toute la suite, p désigne un entier naturel inférieur ou égal à n.

6. On suppose dans cette question que n est pair et on cherche à déterminer les racines carrées de $-I_n$. On suppose qu'il exite une matrice B telle que $B^2 = -I_n$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à B.

a) Montrer qu'il existe un vecteur x_1 tel que $(x_1, f(x_1))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire que pour tout $k \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}$, il existe $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x_1, f(x_1), \ldots, x_k, f(x_k))$ soit une famille libre.

c) En déduire l'ensemble des racines carrées de $-I_n$.

7. Montrer que si n est impair, alors $-I_n$ ne possède pas de racine carrée.

8. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ son endomorphisme canoniquement associé. On suppose dans cette question qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le réel λ_i soit une valeur propre de A.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale.

b) Montrer que si A admet une racine carrée B, alors A et B commutent. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}BP$ soit diagonale.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ pour que A possède une racine carrée.