* * *

L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la précision de la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. (Une équation aux dérivées partielles)

1. Soit $h\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$ si et seulement s'il existe une fonction h_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (u, v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u, v) = h_1(u)$.

2. Soit $\Phi\ :\ (u, v) \mapsto (ue^v, e^{-v})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

b) Pour tout $(x, y) \in \Omega$, exprimer $\Phi^{-1}(x, y)$ et justifier que Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3. Soit $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall\ (x, y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x_2}(x, y) = 0.$$

On pose $f^\star = f \circ \Phi$.

a) Justifier que la fonction $f^\star$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières de $\frac{\partial f^\star}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f^\star}{\partial x_2}$ de $f^\star$.

b) En déduire la forme de la fonction $f^\star$ puis donner celle de f.

4. Soit $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que

$$\forall\ (x, y) \in \Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x_2}(x, y) = ax + by.$$

où a et b sont des réels.

a) Trouver une fonction linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial g}{\partial x_1}(x, y) - y\frac{\partial g}{\partial x_2}(x, y) = ax + by.$$

b) En déduire qu'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\ (x, y) \in \Omega,\ f(x, y) = F(xy) + ax - by.$$

Problème. (Polynômes annulateurs de suites linéaires récurrentes) Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$. On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre sera noté 0.
On définit l'application $\sigma \ : \ \mathcal{S}(\mathbb{K}) \to \mathcal{S}(\mathbb{K})$ qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ associe la suite $\sigma(u)$:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ [\sigma(u)]_n = u_{n+1}.$$

Pour tout entier naturel k, on définit par récurrence $\sigma^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{K})}$ et $\sigma^k = \sigma^{k-1} \circ \sigma$. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on notera $P(\sigma) = \sum_{k=0}^{r} a_k \sigma^k$. On admettra que pour tous polynômes P, $Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$(P+Q)(\sigma) = P(\sigma) + Q(\sigma) \text{ et } (PQ)(\sigma) = P \circ Q(\sigma).$$

Pour toute suite $u \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$, on appelle *annulateur* de u, l'ensemble $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ;\ P(\sigma)(u) = 0\}$.
Enfin, on dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ est une suite linéaire récurrente s'il existe un entier naturel r et des scalaires $q_0, \ldots, q_r \in \mathbb{K}$ tels que $q_0 \neq 0$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ q_0 u_{n+r} + q_1 u_{n+r-1} + \cdots + q_{r-1} u_{n+1} + q_r u_n = 0.$$

Partie I : Polynôme minimal des suites linéaires récurrentes

1. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{r} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Caculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $[P(\sigma)(u)]_n$ en fonction des termes de u.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$.

a) Démontrer que la suite u est linéaire récurrente si et seulement si $\mathrm{Ann}(u) \neq \{0\}$.

b) Démontrer que si u est linéaire récurrente, il existe un unique polynôme normalisé π_u tel que $\mathrm{Ann}(u) = \pi_u \cdot \mathbb{K}[X]$ (on pourra utiliser la division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$). Le polynôme π_u est appelé le *polynôme minimal* de la suite u.

3. Dans cette question on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Démontrer que la suite $v = (2^n + 3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire récurrente. En étudiant les diviseurs du polynôme $X^2 - 5X + 6$, donner le polynôme minimal de v.

b) Démontrer que la suite $w = (n^2 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.

Partie II : Une caractérisation des suites linéaires récurrentes

Dans cette partie on cherche à caractériser les suites récurrentes à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$. On introduit à cette fin les notations suivantes : pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ et pour tout entier $m \geq 0$, on note $H_m(u)$ la matrice de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{K})$ définie par $H_m(u) = (u_{i+j-2})_{1\leq i,j\leq m+1}$ et on désigne par $D_m(u)$ son déterminant.

4. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on choisit la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1\ ;\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

a) Calculer $D_0(u)$, $D_1(u)$, $D_2(u)$, puis $D_m(u)$ pour tout entier $m \geq 2$.

b) Quel est le polynôme minimal de la suite u ?

5. On suppose ici que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ est une suite linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u = X^s + q_1 X^{s-1} + \cdots + q_{s-1}X + q_s.$$

Démontrer que pour tout entier $m \geq s$, $D_m(u) = 0$.

6. Réciproquement, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe un entier $s \geq 1$ vérifiant

$$D_{s-1}(u) \neq 0 \text{ et } \forall\ m \geq s,\ D_m(u) = 0.$$

On se propose de démontrer que u est linéaire récurrente et de donner une méthode de calcul de son polynôme minimal.

a) Quel est le rang de la matrice $H_s(u)$?

b) Démontrer qu'il existe un unique s-uplet $(q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{K}^s$ tel que

$$H_s(u)\begin{pmatrix} q_s \\ q_{s-1} \\ \vdots \\ q_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) On pose, pour tout entier $m \geq s$:

$$\lambda_m = u_m + q_1 u_{m-1} + \cdots + q_{s-1}u_{m-s+1} + q_s u_{m-s}.$$

Que vaut λ_m lorsque m appartient à l'intervalle $[s, 2s]$?

d) Démontrer que

$$D_{s+1}(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_s & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s-1} & u_{s+1} & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 \\ u_s & u_{s+1} & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \lambda_{2s+1} \\ u_{s+1} & u_{s+2} & \cdots & u_{2s} & \lambda_{2s+1} & \lambda_{2s+2} \end{vmatrix}$$

En déduire que $\lambda_{2s+1} = 0$.

e) Plus généralement, soit $m \geq s+1$ pour lequel

$$\lambda_s = \lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_{2s} = \cdots = \lambda_{m+s-1} = 0.$$

Démontrer que

$$D_m(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1} & \cdots & \vdots & u_{2s-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_s & \cdots & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m+s} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & & \iddots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_{m+s} & & \vdots \\ u_m & \cdots & \cdots & u_{m+s-1} & \lambda_{m+s} & * & \cdots & * \end{vmatrix}.$$

On détaillera les opérations effectuées ainsi que l'ordre dans lequel elles sont faites.

f) Conclure que la suite u est linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u = X^s + q_1 X^{s-1} + \cdots + q_{s-1} X + q_s.$$