■ ■ ■

Exercice 1. Soient a, b, c trois réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système d'inconnues (y, z, t) suivant possède une infinité de solutions :

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ z + at = 0 \\ y - z + bt = 0 \\ -y + ct = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. (L'inégalité arithmético-géométrique)

1 . a) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout $(x_1, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^n}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{2^n} x_i\right)^{1/2^n} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^n} x_i}{2^n}.$$

2. Soit k un entier naturel non nul et $(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$. On note $m = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} x_i$ la moyenne arithmétique des nombres $x_1, \dots, x_k$.

a) Vérifier qu'il existe un entier n_0 tel que $2^{n_0} \leq k < 2^{n_0+1}$.

b) On pose $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2^{n_0+1}} = m$. En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{1/k} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i.$$

$\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{1/k}$ est appelée moyenne géométrique et l'inégalité précédente est appelée inégalité arithmético-géométrique.