Devoir à la maison

Calculs de Produits et de Sommes doubles
à rendre le lundi 26 septembre 2011

■ ■ ■

Exercice 1. (Calculs de Produits)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer le produit $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ sous forme de factorielles.

2. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, $n \geq 2$, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de W_{2n} et de W_{2n+1} sous forme de factorielles.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer l'expression

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{n-j+1}{j}.$$

4. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.

a) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}.$$

b) En déduire la valeur de l'expression

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)\right).$$

Définition (Sommes doubles). Soient I, J deux sous-ensembles finisde $\mathbb{N}$ et $(z_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes indexée par I et J. La somme des nombres complexes $z_{i,j}$ pour i parcourant l'ensemble I et j parcourant l'ensemble J, est notée

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} z_{i,j}.$$

Exemples. Soient m, $n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. On suppose que $I = [\![1,n]\!]$ et $J = [\![1,m]\!]$.

∗ On note alors

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_{i,j}.$$

En écrivant les $(z_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ dans un tableau,

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,m} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & \cdots & z_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n,1} & z_{n,2} & \cdots & z_{n,m}, \end{pmatrix}$$

la première somme correspond à la somme des termes du tableau. Dans la deuxième somme, on somme dans un premiers temps chacune des colonnes pour ensuite sommer chacun des résultats obtenus. Dans la troisième somme, on somme dans un premier temps chacune des linges pour ensuite sommer chaun des résultats obtenus.

* Parfois, dans des sommes doubles, les bornes de la seconde somme dépendent du paramètre de sommation de la permière. Par exemple,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} z_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{i,j}.$$

En écrivant les $(z_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ dans un tableau, on somme dans les trois expressions les complexes

$$\begin{pmatrix} \times & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ & \times & \cdots & z_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Caluler les sommes suivantes.

1. $S_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$.

2. $S_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \cdot j$.

3. $S_3 = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij$.

4. $S_4 = \sum_{1\leq i<j\leq n} ij$.

5. $S_5 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$.

6. $S_6 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \min(i,j)$.

Pour tous entiers i, j, on note $\delta_{i,j}$ l'entier qui vaut 1 si $i=j$ et 0 sinon (ce symbole est appelé symbole de Kronecker). Calculer

7. $S_7 = \sum_{1\leq i,j\leq n} i \cdot j \cdot \delta_{i,j}$.

Exercice 3. Soient n, $m \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, $(b_j)_{j\in[\![0,m]\!]}$ deux familles de nombres complexes. Montrer qu'il existe une famille de réels $(c_\ell)_{\ell\in[\![0,n+m]\!]}$ que l'on explicitera telle que

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i\right) = \sum_{\ell=0}^{n+m} c_\ell X^\ell.$$

Une fois les exercices précédents terminés, vous pourrez vous interroger sur les expressions suivantes.

Relations coefficients / racines. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n).$$

Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Formule du crible de Poincaré ou Formule d'inclusion-exclusion. Soit E un ensemble de cardinal fini. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toutes parties $(A_1, \ldots, A_n)$ de E,

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_j\leq n} (-1)^{j+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}|.$$

On rappelle que pour toutes parties A, B de E, $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.