STANISLAS — **Devoir à la maison** — **MPSI 1**

D.M. 4

Une équation différentielle de degré 2

à rendre le mercredi 19 octobre 2011

■ ■ ■

Soit q une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + qy = 0$ toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, pour tout nombre réel t.

On admettra (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*) que, pour tous nombres réels t_0, y_0, y'_0, il existe une *unique* solution de (E) qui satisfait

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0.$$

On dit qu'une fonction est positive (resp. négative) si pour tout nombre réel t, $f(t) \geq 0$ (resp. $f(t) \leq 0$).

1. Soient y, z deux solutions de (E). Montrer que la fonction $yz' - y'z$ est constante.
(Cette fonction s'appelle le Wronskien du couple (y, z).)

2. On désigne par y_1 et y_2 les solutions de l'équation (E) qui satisfont

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1 \quad &, \quad y'_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0 \quad &, \quad y'_2(0) = 1. \end{aligned}$$

a) Calculer la valeur de $y_1y'_2 - y_2y'_1$.

b) Les fonctions y_1 et y_2 peuvent elles avoir un zéro commun, c'est-à-dire, existe-t-il un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$?

c) Montrer que z est une solution de (E) si et seulement si il existe deux constantes réelles λ, μ telles que $z = \lambda y_1 + \mu y_2$.
(On pourra montrer que toute solution z de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $z = z(0)y_1 + z'(0)y_2$.)

d) Montrer que si z est solution de l'équation différentielle, le couple (λ, μ) défini à la question précédente est unique.

3. Montrer que si q est une fonction paire, la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire.