Devoir à la maison

Quelques propriétés de la cardioïde

à rendre le vendredi 04 novembre 2011

■ ■ ■

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans tout ce problème, a désigne un réel strictement positif. Soit Γ la cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$. On désigne par M_θ le point de Γ de paramètre θ, autrement dit le point de coordonnées polaires $(a(1+\cos\theta), \theta)$.

1. Simplifier, pour $\theta \in \mathbb{R}$, les expressions suivantes.

a) $A = e^{i\theta} + e^{i(\theta+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(\theta-\frac{2\pi}{3})}$. **b)** $B = e^{2i\theta} + e^{2i(\theta+\frac{2\pi}{3})} + e^{2i(\theta-\frac{2\pi}{3})}$.

2 . a) Étudier et construire la courbe Γ.

b) Calculer l'angle $\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{V_\theta})}$, où $\vec{V_\theta}$ désigne le vecteur vitesse au point M_θ.

c) Donner une équation normale de la tangente $\mathscr{T}_\theta$ à Γ en un point M_θ.

3 . a) Quels sont les points de Γ à tangente verticale ? horizontale ?

b) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et Δ_φ la droite qui passe par 0 et forme un angle φ avec l'axe des abscisses. Montrer que Γ admet trois tangentes parallèles à Δ_φ. On note M_{θ_1}, M_{θ_2} et M_{θ_3} les trois points de contact.

c) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G du triangle $M_{\theta_1}M_{\theta_2}M_{\theta_3}$. Vérifier que l'affixe de G est indépendante de φ. Placer le point G sur le graphe de la cardioïde.

d) Montrer que l'aire du triangle $M_{\theta_1}M_{\theta_2}M_{\theta_3}$ est constante et vaut $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$.

e) Soit I le milieu de $[M_{\theta_2}M_{\theta_3}]$. Montrer que I est le barycentre de M_{θ_1} et G pondérés de coefficients que l'on précisera. En déduire le lieu des points I lorsque M_{θ_1} parcourt la cardioïde Γ.

4 . a) Déterminer les coordonnées du symétrique Ω de O par rapport à la tangente $\mathscr{T}_\theta$.

b) Déterminer une équation polaire du lieu Ψ des points Ω lorsque M_θ parcourt Γ.

c) Étudier et construire la courbe Ψ.

5. La droite Δ_φ (qui passe par O) rencontre Γ en deux points P et Q autres que O. On note A le point d'affixe 2.

a) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G' du triangle APQ.

b) Montrer que lorsque P parcourt la cardioïde Γ, G' décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Montrer que les tangentes à Γ en P et Q sont perpendiculaires. Donner les équations normales de ces deux tangentes et déterminer leur point d'intersection R.

d) Montrer que lorsque P parcourt la cardioïde Γ, R décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.