



Le but de ce problème est de construire \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} en utilisant la méthode des coupures.

Une coupure α est un sous-ensemble de \mathbb{Q} vérifiant les propriétés suivantes

- (i) α est non vide et différent de \mathbb{Q} .
- (ii) Si $r \in \alpha$ et si $s < r$, alors $s \in \alpha$.
- (iii) Si $r \in \alpha$, il existe $s \in \alpha$ tel que $r < s$.

On notera \mathbb{R} l'ensemble des coupures. Dans toute la suite, les lettres grecques désignent des coupures alors que les lettres latines désignent des rationnels. Pour tout rationnel r , on notera $r^* = \{p \in \mathbb{Q} ; p < r\}$.

1. Deux résultats simples.

- a) Montrer que si $r \in \alpha$ et $s \notin \alpha$, alors $r < s$.
- b) Montrer que si $r \notin \alpha$ et si $r < s$, alors $s \notin \alpha$.
- c) Montrer que pour tout rationnel r , l'ensemble r^* est une coupure.

2. \mathbb{R} est un ensemble totalement ordonné.

Soient α, β deux coupures. On note $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\alpha \subset \beta$.

- a) Montrer que \leq est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que cet ordre est un ordre total.

3. \mathbb{R} possède la propriété de la borne supérieure.

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{R} . Soit $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$.

- a) Montrer que γ est une coupure.
- b) Montrer que γ est un majorant de A .
- c) Conclure en montrant que γ est le plus petit des majorants de A .
- d) En déduire le théorème de la borne inférieure.

4. Définition de l'addition.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On note $\alpha + \beta = \{r + s, (r, s) \in \alpha \times \beta\}$.

- a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha + \beta$ est une coupure.
- b) Montrer que la loi $+$ est commutative et associative.
- c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha + 0^* = \alpha$.
- d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $\beta = \{r \in \mathbb{Q} | \exists s > 0 ; -r - s \notin \alpha\}$. Montrer que $\beta \in \mathbb{R}$ puis que $\alpha + \beta = 0^*$.

On notera par la suite $\beta = -\alpha$.

- e) En déduire que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

5. Compatibilité avec la relation d'ordre.

Si $\alpha \leq \beta$, on note $\alpha < \beta$ si $\alpha \neq \beta$.

- a) Montrer que si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que $\beta < \gamma$, alors $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
- b) Montrer que si $\alpha > 0^*$ si et seulement si $-\alpha < 0^*$.

6. Définition de la multiplication.

a) Soient $\alpha > 0^*$ et $\beta > 0^*$. On note $\alpha_+ = \alpha \cap \mathbb{Q}_+$, $\beta_+ = \beta \cap \mathbb{Q}_+$ et $\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} | \exists (r, s) \in \alpha_+ \times \beta_+ ; p \leq rs\}$.

Montrer que cette opération définit une loi interne, commutative, associative, d'élément neutre 1^* et distributive par rapport à l'addition.

- b) Proposer une définition de la multiplication lorsque α et β ne sont plus nécessairement strictement positifs.

On a ainsi montré que \mathbb{R} est un corps totalement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure.

7. \mathbb{R} et \mathbb{Q} .

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{Q}$,

(i) $(r + s)^* = r^* + s^*$.

(ii) $(rs)^* = r^*s^*$.

(iii) $r^* < s^*$ si et seulement si $r < s$.

On a ainsi défini un sous-corps de \mathbb{R} isomorphe à \mathbb{Q} .

8. Comment définiriez-vous $\sqrt{2}$?

Cette construction de \mathbb{R} , appelée méthode des coupures, a été introduite par R. Dedekind en 1872. Ce sujet suit la présentation de W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis.