Devoir à la Maison

Construction des fonctions puissance

Devoir non relevé

■ ■ ■

Attention : dans vos démonstrations, vous devrez ne jamais faire référence aux fonctions logarithme et exponentielle ; seul l'usage des puissances entières est autorisé.

Dans tout cet exercice, x désigne un réel strictement positif et n désigne un entier non nul.

De la question **1.** à la question **6.**, x et n sont **fixés**.

1. Montrer que s'il existe un réel $y > 0$ tel que $y^n = x$, ce réel est unique.

2. Étude de l'ensemble $\mathscr{E} = \{t \in \mathbb{R} \ ; \ t^n < x\}$.

a) Montrer que $\dfrac{x}{1+x} \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathscr{E}$, $t < 1 + x$.

c) En déduire que $\mathscr{E}$ possède une borne supérieure que nous noterons y.

Nous allons maintenant démontrer que $y^n = x$.

3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$.

4. Nous allons montrer dans cette question que $y^n \geq x$. Supposons par l'absurde que $y^n < x$.

a) Soit h un réel strictement positif tel que $h < \inf\left\{1, \dfrac{x - y^n}{n(1+y)^{n-1}}\right\}$. Montrer que

$$(y+h)^n - y^n < x - y^n.$$

b) En déduire que $y + h \in \mathscr{E}$.

c) Conclure.

5. Nous allons montrer dans cette question que $y^n \leq x$. Supposons par l'absurde que $y^n > x$. En notant $k = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, montrer que $y - k$ est un majorant de $\mathscr{E}$. Conclure.

6. Déduire des questions précédentes que $y^n = x$.

Dans toute la suite, pour tout réel strictement positif x et pour tout entier naturel n non nul, on note $x^{1/n}$ l'unique réel strictement positif tel que $(x^{1/n})^n = x$.

7. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier positif. Montrer en utilisant les définitions précédentes que

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

8. Soit $b > 1$. Dans cette question, nous allons construire la puissance r-ème de b, où r est un rationnel strictement positif.

a) Soit r un nombre rationnel strictement positif s'écrivant sous la forme $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{s}{t}$, avec $(p,s) \in \mathbb{N}^2$ et $(q,t) \in (\mathbb{N}^\star)^2$. Montrer que $(b^p)^{1/q} = (b^s)^{1/t}$.

On notera ainsi $b^r = (b^p)^{1/q}$.

b) Montrer que pour tous nombres rationnels strictement positifs r et s, $b^{r+s} = b^r b^s$.

c) Soient r et s deux nombres rationnels strictement positifs. Montrer que si $r \leq s$, alors $b^r \leq b^s$.

9. Soit $b > 1$. Dans cette question, nous allons construire la puissance y-ème de b, où y est un nombre réel strictement positif.

À tout réel strictement positif y, on associe l'ensemble $B(y) = \{b^s \ ; \ s \in \mathbb{Q}_+, \ s \leq y\}$.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^\star$, $\sup B(r) = b^r$.

b) Pour tout nombre réel strictement positif y, montrer que l'ensemble $B(y)$ admet une borne supérieure.

On définit alors $b^y = \sup B(y)$.

c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. Prouver que $b^{x+y} = b^x b^y$.