STANISLAS | Devoir à la Maison | **MPSI 1**
DM n° 10 | Points fixes et Convexité | ind. : 2h

À rendre le lundi 23 janvier 2012

■ ■ ■

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1) = 1$. On suppose que f est strictement convexe, i.e. que pour tous $x, y \in [0,1]$ et $\lambda \in]0,1[$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Pour tout entier naturel non nul n, on note $f_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $m = f'(1)$.

On suppose que $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1. Montrer que la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel q.

2. On veut montrer que f admet au plus un point fixe dans $]0,1[$. Pour cela, on suppose que f admet deux points fixes dans $]0,1[$ que nous noterons q_1 et q_2.

a) Montrer qu'il existe deux réels distincts ξ_1, $\xi_2 \in]0,1[$ tels que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$.

b) Conclure.

Le cas $m \leq 1$

3. Soit g la fonction définie pour tout $s \in [0,1]$ par $g(s) = f(s) - s$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante.

b) En déduire que pour tout $s \in [0,1[$, $f(s) > s$.

4. En déduire que $q = 1$.

Le cas $m > 1$

5. Montrer qu'il existe un réel $s_0 \in [0,1[$ tel que pour tout $s \in]s_0, 1[$, $f(s) < s$.

6. En déduire que $q < 1$.