Stanislas
DM n° 11

Devoir à la Maison

Espaces Vectoriels
À rendre le lundi 30 janvier 2012

MPSI 1
ind. : 1h30

■ ■ ■

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}^3$. On pose $E_1 = \{(x, y, z) \in E\ ;\ x + y + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in E\ ;\ x = -y = z\}$.
1. Montrer que E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
3. Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Pour tout $u = (x, y, z) \in E$, déterminer $p(u)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, $q \in \mathscr{L}(E)$ tels que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$.
Pour tout endomorphisme h de E, on dit que λ est une valeur propre de h s'il existe un vecteur x non nul tel que $h(x) = \lambda x$. Le vecteur x est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.
1. Montrer que $g \circ g = g$.
2. Montrer que si λ est une valeur propre de p, alors $\lambda \in \{0, 1\}$.
3. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.
4. Montrer que f est non injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0\}$.
5. Montrer que 2 est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0\}$.