STANISLAS | Devoir à la Maison | **MPSI 1**
DM n° 14 | Introduction aux Idéaux | ind. : 3h00
Vacances d'hiver

■ ■ ■

Dans toute la suite $(A,+,\cdot)$ désigne un anneau commutatif. Soit $\mathscr{I} \subset A$. On dit que $\mathscr{I}$ est un idéal de A si

1. $(\mathscr{I},+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$,
2. $\mathscr{I}$ est absorbant, i.e. pour tout $a \in A$ et $x \in \mathscr{I}$, $a \cdot x \in \mathscr{I}$.

Dans toute la suite, $\mathscr{I}$ et $\mathscr{J}$ désignent des idéaux de A.

1. Questions de stabilité.

a) Donner des exemples d'idéaux de A.

b) Montrer que $\mathscr{I} \cap \mathscr{J}$ est un idéal de A.

c) Montrer que $\mathscr{I} + \mathscr{J} = \{i+j,\, i \in \mathscr{I},\, j \in \mathscr{J}\}$ est un idéal de A.

2. On définit $\widetilde{\mathscr{I}} = \{x \in A\ ;\ \exists\, n \in \mathbb{N},\, x^n \in \mathscr{I}\}$.

a) Montrer que $\widetilde{\mathscr{I}}$ est un idéal de A.

b) Montrer que $\widetilde{\widetilde{\mathscr{I}}} = \widetilde{\mathscr{I}}$.

On dit que $\mathscr{I}$ est un idéal principal s'il est engendré par un seul élément, i.e. s'il existe $a \in A$ tel que $\mathscr{I} = \{a \cdot q,\, q \in A\}$. On notera $\mathscr{I} = (a)$. On dit qu'un anneau est principal s'il est intègre et si tous ses idéaux sont principaux.
On rappelle que pour $a,\, b \in A$, $a|b$ s'il existe $k \in A$ tel que $b = a \cdot k$.

3. Exemples.

a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est un anneau principal.

b) L'union de deux idéaux est-elle toujours un idéal ?

c) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

4. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. On suppose dans cette question que A est un anneau principal. Soient $a,\, b \in A$. On rappelle que $(a)+(b)$ et $(a) \cap (b)$ sont des idéaux et, A étant un anneau principal, on note $(a)+(b) = (\delta)$ et $(a) \cap (b) = (\mu)$.
On rappelle également que pour $a,\, b \in A$, on dit que a divise b s'il existe un élement $c \in A$ tel que $b = a \cdot c$.

a) Montrer que δ et μ sont uniques à multiplication par un élément inversible près.

b) Soit $d \in A$. Montrer que $d|\delta$ si et seulement si $d|a$ et $d|b$.

c) On dit que a et b sont premiers entre eux si $(a)+(b) = (1)$. Montrer qu'il existe deux éléments u et v de A tels que $1 = a \cdot u + b \cdot v$.

d) Soit $m \in A$. Montrer que $\mu|m$ si et seulement si $a|m$ et $b|m$.

On a commencé par montrer que les anneaux euclidiens (i.e. qui possèdent une division euclidienne) sont principaux. Ensuite, on a défini, dans les anneaux principaux, le pgcd et le ppcm de deux éléments. L'étudiant zélé pourra retrouver le lemme de Gauss ainsi que toutes les propriétés classiques des pgcd et ppcm. On retrouve le cas particuliers de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$ étudiés en cours.