



L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas particuliers l'équation fonctionnelle

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où f est l'inconnue supposée continue sur \mathbb{R} et g est une fonction donnée définie sur \mathbb{R} .

On suppose dans cette partie que la fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R}

1. a) Montrer que les fonctions solutions de (1) sont deux fois dérivables et solutions d'une équation différentielle du second ordre.

b) Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. En déduire les solutions de l'équation (1) lorsque

a) g est la fonction nulle,

b) g est une constante,

c) g est un polynôme de degré 1.

3. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{2} \left[\int_0^x e^{-t} g'(t) dt + k_1 \right] + \frac{e^{-x}}{2} \left[\int_0^x e^t g'(t) dt + k_2 \right]$$

est solution de l'équation différentielle obtenue à la question **1.a)**. Déterminer k_1 et k_2 pour que f soit solution de (1).

4. Résoudre l'équation (1) lorsque g est la fonction exponentielle.

Dans cette partie, on suppose que la fonction g est seulement continue

On note \mathcal{C} l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} à valeurs réelles.

5. Montrer que l'équation (1) possède au plus une solution.

6. On définit l'application A qui à une fonction f de \mathcal{C} associe la fonction $A(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

Montrer que l'application A est une application de \mathcal{C} dans \mathcal{C} injective.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n l'itérée n -ème de A , i.e. $A_0(f) = f$ et $A_n(f) = A(A_{n-1}(f))$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_2(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f(t) dt$.

b) En déduire une expression intégrale de $A_n(f)$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = A + A_2 + \dots + A_n$ et U l'application qui à toute fonction f de \mathcal{C} associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$U(f)(x) = \int_0^x \sinh(x-t)f(t) dt.$$

a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sinh(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\cosh(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

b) En déduire que pour tout réel x ,

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \frac{\cosh(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| dt \right|.$$

c) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$ et pour tout réel x ,

$$(U \circ A)(f)(x) = (A \circ U)(f)(x) = (U - A)(f)(x).$$

9. Soit Id la fonction identité sur \mathcal{C} .

a) Montrer que les applications $\text{Id} - A$ et $\text{Id} + U$ sont des applications bijectives de \mathcal{C} dans \mathcal{C} , réciproques l'une de l'autre.

b) En déduire la solution de l'équation (1).

10. Expliciter f lorsque la fonction g est paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$