



Pour tout entier naturel  $n$ , on définit sur  $\mathbb{R}_+$  les fonctions  $\varphi_n$ ,  $\Phi_n$  et  $f$  par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2nx)\cos x}{\sin x} & , x \notin \pi\mathbb{N} \\ 2n & , x \in \pi\mathbb{N} \end{cases} , \Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2nx)}{x} & , x > 0 \\ 2n & , x = 0 \end{cases} , f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0. \end{cases} .$$

1. Soit  $n$  un entier naturel.

a) Montrer que les fonctions  $f$ ,  $\varphi_n$  et  $\Phi_n$  sont continues de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$  existe et appartient à  $\mathbb{R}$ . Nous la noterons  $\ell$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(t) dt$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $u_n$  est bien défini.

b) Calculer  $u_{n+1} - u_n$  et en déduire la valeur de  $u_n$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_n(t) dt$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $v_n$  est bien défini.

b) Étudier la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini de  $v_n$ . Si elle existe, on exprimera cette limite en fonction de  $\ell$ .

4. On suppose que  $g$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $[a, b]$  et que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de réels tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(w_n t) dt = 0$ .

5. On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

6. En déduire la valeur de  $\ell$ .

7. Pour tout réel positif  $x$ , on note  $F(x) = \int_0^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ . On propose de démontrer que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, +\infty[$ , c'est-à-dire que la fonction  $F$  n'admet pas de limite finie en  $+\infty$ .

a) Montrer que  $F$  est croissante et que pour tout entier naturel  $k$ ,  $F((k+1)\pi) - F(k\pi) \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$ .

b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .