Devoir à la Maison

Un problème d'optimisation

À rendre le 04 juin 2012

■ ■ ■

Soit E l'espace des fonctions défini par

$$E = \{f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ \exists a,\, b,\, c,\, d,\, e \in \mathbb{R},\, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + e\cos(x)\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base.

Pour tous f, $g \in E$, on définit la quantité

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\, dt.$$

2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. À l'aide du procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Montrer que la fonction cos n'appartient pas à $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le projeté orthogonal de cos sur $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Calculer la distance de la fonction cos à $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Calculer le minimum, lorsque a, b et c décrivent l'ensemble des réels de la quantité $\displaystyle\int_0^{\pi} (a + bx + cx^2 - \cos x)^2\, dx$.
8. Calculer la distance du polynôme X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Comparer les distances de cos et X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.