STANISLAS | Devoir à la Maison | **MPSI 1**
DM n° 22 | Endomorphismes antisymétriques | ind. : 3h00
À rendre le 11 juin 2012

■ ■ ■

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. (e_1, e_2, e_3) est la base canonique, Id_E désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$.

On admet que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

On rappelle que pour tout endomorphisme u de E et tout réel λ, on dit que λ est une valeur propre de u si et seulement s'il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

2 . a) Démontrer que si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $P(\lambda) = \det(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Montrer que P est un polynôme de degré 3 à coefficients réels.

c) Montrer que le polynôme P a au moins une racine réelle.

d) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.

3 . a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

b) En déduire que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

4. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$ un vecteur non nul.

a) Démontrer que $(x, u(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(u)$.

b) En déduire les dimensions de $\mathrm{Im}(u)$ et de $\mathrm{Ker}(u)$.

5. Soient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormale de $\mathrm{Im}(u)$ et ε_3 un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}(u)$. On pose $\alpha = \langle u(\varepsilon_1), \varepsilon_2\rangle$.

a) Montrer que $u(\varepsilon_1) = \alpha\varepsilon_2$.

b) En déduire que la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.

a) Montrer que $u^2 = -\alpha^2 p$ où p est une projection orthogonale à préciser.

b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, u^n en fonction de α, p et u en distinguant selon la parité de n.

7. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$.

a) Démontrer que la somme $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!}$ s'écrit $\mathrm{Id}_E + C_N(\alpha)p + S_N(\alpha)u$ où C_N et S_N sont des polynômes.

b) Montrer que la suite de terme général $1 + C_N(\alpha) + i\alpha S_N(\alpha)$ est convergente. En déduire que les deux suites $(C_N(\alpha))_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_N(\alpha))_{N\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers deux réels que l'on notera respectivement $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$. Préciser $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$.

c) Caractériser géométriquement l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E + C(\alpha)p + S(\alpha)u$.