STANISLAS — Devoir Surveillé — **MPSI / PCSI**

DS n°0 — 2h — 10 septembre 2011

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.

■ ■ ■

Exercice 1. (Calculs de limites) Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes.

1. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$. **2.** $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$. **3.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des suites suivantes.

4. $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\tan\frac{1}{n}$. **5.** $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^2}$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison 8.

Exercice 2. (Fonctions usuelles) Soit a un réel strictement positif. Pour chacune des fonctions suivantes, vous déterminerez le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la fonction dérivée.

1. $f_1\ :\ x\mapsto\frac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}$.

2. $f_2\ :\ x\mapsto\cos\left(\frac{4}{x^2+1}\right)$.

3. $f_3\ :\ x\mapsto\frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)$.

4. $f_4\ :\ x\mapsto\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

Exercice 3. (Résolution d'(in)équations) Soit m un réel. Déterminer

1. l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des nombres complexes z tels que $z^4=1$.

2. l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des réels x tels que $x-1=\sqrt{x+2}$.

3. l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des réels x tels que $e^{x^2+x}\leq e$.

4. l'ensemble $\mathscr{E}_4$ des réels x tels que $0\leq(m+1)x+2-m$.

5. l'ensemble $\mathscr{E}_5$ des réels x, y, z tels que $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & z \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} & = & \frac{1}{z}\end{array}\right.$

Exercice 4. (Calculs d'intégrales) Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1=\displaystyle\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. **2.** $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx$. **3.** $I_3=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$.

Exercice 5.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}_1$ des réels x tels que

$$4x^2+20x-875\leq 0.$$

2. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}_2$ des réels x tels que

$$4x^4+20x^2-875\leq 0.$$

Exercice 6. Montrer que pour tout réel positif x, on a

$$x-\frac{x^3}{6}\leq\sin(x).$$

Exercice 7. Soient $k\in\mathbb{R}$ et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x-k(\sin^4 x+\cos^4 x)$.

1. Soit x un réel. Calculer et simplifier $f'(x)$ et en déduire la valeur de k pour laquelle f est constante.

2. À l'aide de l'expression simplifiée de f', établir une expression simplifiée de f.

3. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution ?