Devoir Surveillé

2h

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des réels x tels que

$$\sqrt{x^3+5x^2+2x+1} = x+1.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n}.$$

3. Soit m un réel. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des solutions du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{r} mx+m^2y+z=0 \\ 2mx+my+mz=m \\ x+my+2z=0 \end{array}\right. .$$

Problème. (Étude de tribus) Dans tout ce problème, E désigne un ensemble. Pour toute partie A de E, nous noterons ${}^cA$ le complémentaire de A dans E. La notation $\mathscr{P}(E)$ désignera l'ensemble des parties de E. Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathscr{F}$ est une tribu sur E si

1. $\mathscr{F}$ est non vide.
2. Si A est un élément de $\mathscr{F}$, alors ${}^cA$ est un élément de $\mathscr{F}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{F}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathscr{F}$.

1. Exemples et Contre-exemples. On suppose dans cette question que $E=\mathbb{N}$. Les ensembles suivants sont-ils des tribus sur $\mathbb{N}$ (vos réponses devront être justifiées) ?

a) $\mathscr{F}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.
b) $\mathscr{F}_2 = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
c) $\mathscr{F}_3 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{i\}, i\in\mathbb{N}\}$.

2. Propriétés élémentaires. Soit $\mathscr{F}$ une tribu sur E.

a) Montrer que si A_0 et A_1 sont des éléments de $\mathscr{F}$, alors $A_0\cup A_1$ est un élément de $\mathscr{F}$.
b) Montrer que E et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathscr{F}$.
c) Soit n un entier naturel. Montrer que si $A_0,\ldots,A_n$ sont des éléments de $\mathscr{F}$, alors $\bigcap\limits_{i=0}^{n} A_i$ est un élément de $\mathscr{F}$.
d) Soit X un sous-ensemble de E et $\mathscr{G}_X = \{A\cap X,\, A\in\mathscr{F}\}$. Montrer que $\mathscr{G}_X$ est une tribu sur X.

3. Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux tribus sur E. Montrer que $\mathscr{F}_1\cap\mathscr{F}_2$ est une tribu sur E.

4. Définition équivalente. Soit $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(E)$.

a) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que $(A_1, A_2\cap{}^cA_1)$ est une partition de $A_1\cup A_2$.
b) Montrer que $\mathscr{F}$ est une tribu sur E si et seulement si

1'. $\mathscr{F}$ est non vide,

2'. $\forall\, A \in \mathscr{F},\, {}^c A \in \mathscr{F}$.

3'. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{F}$ deux à deux disjoints, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathscr{F}$.

3'. Pout tout entier naturel n et pour tous éléments $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathscr{F}$, l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est un élément de $\mathscr{F}$.

5. Tribu engendrée. Soit A une partie de $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des tribus sur E contenant A.

a) Montrer que $\mathscr{I}$ est non vide.

b) On note $\mathscr{F}_A = \bigcap_{\mathscr{F}\in\mathscr{I}} \mathscr{F}$. Montrer que $\mathscr{F}_A$ est une tribu sur E contenant A.

c) Montrer que si $\mathscr{F}_0$ est une tribu sur E contenant A, alors $\mathscr{F}_A \subset \mathscr{F}_0$.

On dit que $\mathscr{F}_A$ est la tribu engendrée par A, ou la plus petite tribu contenant A.

d) On suppose dans cette question que $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer la plus petite tribu sur E contenant $\{a\}$.

e) On suppose dans cette question que $E = [0, 1]$. Déterminer la plus petite tribu sur E contenant $\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$.