■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. Soit t un réel.
1. Exprimer $\sinh(2t)$ en fonction de $\sinh(t)$ et de $\cosh(t)$.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer la quantité $P_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{t}{2^k}\right)$ en fonction de $\sinh(t)$ et de $\sinh\left(\frac{t}{2^n}\right)$.
3. En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de $P_n(t)$.

Exercice 2. Identifier l'ensemble des réels x tels que $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

Exercice 3.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. Soit z_0 une solution de l'équation précédente. Montrer que $z_0 + \frac{1}{z_0}$ est solution d'une équation polynomiale du second degré à coefficients réels que l'on déterminera.
3. À l'aide des questions précédentes, exprimer à l'aide de racines carrées les réels $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Problème. (Inégalité isopérimétrique pour des polygones) Le plan complexe est muni de son produit scalaire et de son orientation usuelle. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et ω désigne le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
On appelle polygone à n côtés (ou polygone si n est sous-entendu) tout n-uplet $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On convient que $z_n = z_0$. Le polygone Z est dit

* équilatéral si la quantité $|z_{j+1} - z_j|$ ne dépend pas de j, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$.
* régulier s'il existe $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que : pour tout k, $z_k = a\omega^k + b$, ou, pour tout k, $z_k = a\overline{\omega}^k + b$.

Étant donné un polygone $Z = (z_0, \ldots, z_{n-1})$ et un nombre complexe c, on définit

* son conjugé $\overline{Z} = (\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_{n-1}})$.
* son translaté par c : $Z + c = (z_0 + c, z_1 + c, \ldots, z_{n-1} + c)$.

Enfin, on pose, pour tout entier $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\hat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\omega}^j\right)^k z_k.$$

On rappelle **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** sur $\mathbb{R}^n$:
Pour tous n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec égalité si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont proportionnels.

Partie I : Calculs préliminaires

1. Montrer que tout polygone régulier est équilatéral.
2. Montrer que tout polygone régulier est inscrit dans un cercle dont on donnera le centre et le rayon en fonction de a et b.

3. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$.

4. Soit $Z = (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $z_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^j\right)^k \hat{z}_k$.

Partie II : L'inégalité isopérimétrique

Pour tout polygone $Z = (z_0, \dots, z_{n-1})$, on définit

$$L(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$$

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2$$

$$A(Z) = \frac{1}{2} \mathscr{I}\left(\right) \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}.$$

On dit que Z n'est pas réduit à un point s'il existe i, j avec $0 \leq i < j \leq n-1$ tels que $z_i \neq z_j$.

5 . a) Interpréter géométriquement la quantité $L(Z)$.

La quantité $E(Z)$ peut se voir comme une énergie du système et $A(Z)$ comme l'aire algébrique.

b) Soit $c \in \mathbb{C}$. Exprimer $A(\overline{Z})$ et $A(Z + c)$ en fonction de $A(Z)$.

6. On suppose dans cette question que Z est un polygone régulier.

a) Calculer $L(Z)$, $E(Z)$ et $|A(Z)|$. On exprimera le résultat en fonction de $\sin \frac{\pi}{n}$ et $\sin \frac{2\pi}{n}$.

b) Lorsque Z n'est pas réduit à un point, en déduire les rapports $\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2}$, $\frac{|A(Z)|}{E(Z)}$ et $\frac{L(Z)^2}{E(Z)}$.

L'objectif de ce problème est de montrer que ces rapports sont maximaux.

7. Montrer que pour tout polygone $Z \in \mathbb{C}^n$, on a $L(Z)^2 \leq nE(Z)$. À quelle condition sur Z a-t-on égalité ?

8 . a) Établir les relations

$$A(Z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) |\hat{z}_k|^2,$$

$$E(Z) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) |\hat{z}_k|^2.$$

b) Montrer que

$$E(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) A(Z) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] |\hat{z}_k|^2.$$

c) En déduire que $\frac{|A(Z)|}{E(Z)} \leq \frac{1}{4\tan\frac{\pi}{n}}$.

d) Montrer que l'égalité se produit si et seulement si Z est régulier non réduit à un point.

9. On admet qu'il existe un polygone Z_0 non réduit à un point tel que pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ non réduit à un point, $\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2} \leq \frac{|A(Z_0)|}{L(Z_0)^2}$. On pose $\alpha = \frac{|A(Z_0)|}{L(Z_0)^2}$.

a) Montrer que Z_0 est équilatéral.

On pourra déplacer z_j parallèlement à $z_{j+1} - z_{j-1}$ pour établir $|z_j - z_{j-1}| = |z_{j+1} - z_j|$.

b) En déduire la valeur de α et les polygones Z pour lesquels ce maximum est atteint.