Stanislas	Devoir Surveillé	**MPSI 1**
DS n°3	4h	11 novembre 2011

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. On rappelle que $\sqrt{2} \approx 1.4$ et $\sqrt{3} \approx 1.7$.
Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique $M(t) = (x(t), y(t))$ définie par $\begin{cases} x(t) = \cos(t)\sin^2(t) \\ y(t) = \sin(t)\cos^2(t) \end{cases}$.

1. Justifier qu'il suffit de prendre le paramètre t dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour étudier toute la courbe.

2. Soit $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Comparer $M(-t)$ et $M(t)$ et montrer que $\mathscr{C}$ admet une symétrie à préciser.

b) Comparer $M(\pi - t)$ avec $M(t)$ et montrer que $\mathscr{C}$ admet une symétrie à préciser.

c) Comparer $M(\pi/2 - t)$ avec $M(t)$ et montrer que $\mathscr{C}$ admet une symétrie à préciser.

3. Proposer un intervalle d'étude I qui tienne compte des symétries précédemment trouvées. Préciser par quelles symétries successives on obtient la courbe $\mathscr{C}$ à partir du tracé obtenu pour $t \in I$.

4. Étudier les variations des fonctions x et y sur I et dresser leur tableau de variation conjoint. On notera $t_0 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Préciser les vecteurs tangents à la courbe $\mathscr{C}$ en les points mis en évidence dans le tableau de variations précédent.

6. Tracer en gras la partie de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $t \in I$ et en pointillés la partie complétée par les transformations géométriques.

7 . a) En notant (ρ, θ) un couple de coordonnées polaires des points de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer une relation simple entre ρ^2 et θ.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ est inscrite dans un cercle de centre 0 et de rayon à préciser.

Exercice 2. Dans cet exercice, E désigne l'ensemble des fonctions continues de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $f \in E$. On considère l'équation différentielle

$$\forall\, x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ y''(x) + y(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'ensemble des fonctions appartenant à E du type $x \mapsto P_1(x)\cos(x) + P_2(x)\sin(x)$, où P_1 et P_2 sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

1. Dans cette question, la fonction f est définie par $x \mapsto x + 1$.

a) Résoudre l'équation différentielle correspondante.

b) Combien de solutions vérifient l'équation $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$?

c) Combien de solutions vérifient l'équation $y(0) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$?

2. Si $y \in F_n$, montrer que $y'' + y \in F_{n-1}$.

3. Dans cette question, la fonction f est définie par $x \mapsto (x-1)\sin(x)$.

a) Déterminer une solution de l'équation différentielle appartenant à F_n (où n sera choisi judicieusement).

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

c) Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$?

d) Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$?

4. Dans cette question et les suivantes, f est une fonction quelconque de E. Soit z une solution de l'équation différentielle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

a) On suppose qu'il existe deux fonctions A et B de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ les relations

$$\begin{aligned} A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x) &= z(x), \\ A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) &= 0. \end{aligned}$$

Calculer $A(x)$ et $B(x)$.

b) En déduire que z peut s'écrire pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sous la forme

$$z(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt + C_1\cos(x) + C_2\sin(x),,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

c) Montrer que l'on a ainsi obtenu toutes les solutions de l'équation différentielle.

5. Montrer que l'équation différentielle admet une solution unique y_0 vérifiant $y_0(0) = 0$ et $y_0(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. Montrer que l'équation différentielle admet au moins une solution y_1 vérifiant $y_1(0) = 0$ et $y_1'(\frac{\pi}{2}) = 0$ si et seulement si la fonction f vérifie la condition $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt = 0$.

Problème. (Cercles tangents) Soient Ω et Ω' deux cercles tangents de centres respectifs G et G', de rayons respectifs ρ et ρ' ($\rho' > \rho$). On dit que Ω est intérieur à Ω' si $GG' = \rho - \rho'$ et que Ω est extérieur (ou tangent extérieurement) à Ω' si $GG' = \rho + \rho'$.

Dans tout l'exercice, Γ et Γ' sont deux cercles tangents extérieurement, de rayons respectifs r et R ($r < R$), de centres respectifs A et B. On notera M_1 leur point de contact.

Quelques cas particuliers

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des cercles Γ'' (de centre C et de rayon ρ) tangents à Γ et Γ' tels que

Γ est intérieur à Γ'' et Γ' est extérieur à Γ'',
ou Γ est extérieur à Γ'' et Γ' est intérieur à Γ'',
ou Γ'' est intérieur à Γ,
ou Γ'' est intérieur à Γ'.

2. Soit Γ'' un cercle de centre C tangent aux deux cercles Γ et Γ' et n'appartenant pas à $\mathscr{F}$. On note M_1 (resp. M_2, M_3) le point d'intersection entre Γ et Γ' (resp. $\Gamma \cap \Gamma''$, $\Gamma' \cap \Gamma''$) et Δ_1 (resp. Δ_2, Δ_3) la tangente commune aux cercles en ce point.

a) Montrer que Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles. On notera I leur point de concours.

b) Montrer que $IM_1 = IM_2$.

c) Montrer que $CI^2 - BI^2 = CM_3^2 - BM_3^2 + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{M_3I}$.

d) Montrer que $CI^2 - BI^2 = CM_2^2 - BM_1^2$.

e) En déduire que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en un point I équidistant des points de contact.

Étude analytique

On choisit le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ suivant

* l'origine O du repère est le point de contact entre Γ et Γ',
* le premier axe $(O, \overrightarrow{i})$ est (AB) orienté de telle manière que les coordonnées de A (resp. B) soient $(-r, 0)$ (resp. $(0, R)$).

3. Soient (x, y) les coordonnées du centre C d'un cercle Γ'' de rayon ρ, n'appartenant pas à $\mathscr{F}$ et tangent à Γ et Γ'. Exprimer ρ en fonction de x, r et R.
4. En déduire que les centres des cercles n'appartenant pas à $\mathscr{F}$, tangents extérieurement à Γ et Γ', sont sur une même hyperbole $\mathscr{H}$ dont on précisera le centre et les asymptotes.
5. Montrer que les points d'intersection P et P' du cercle de diamètre $[AB]$ et de $(O, \overrightarrow{j})$ sont sur les asymptotes de $\mathscr{H}$.