# Devoir Surveillé

2h



■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

**Exercice 1. (Distance à une partie de $\mathbb{R}$)** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}(x) = \{|x-a|,\, a \in A\}$ possède une borne inférieure. Cette borne inférieure sera notée $d(x, A)$ et appelée la *distance de $x$ à $A$*.

**2.** Soit $x \in A$. Calculer $d(x, A)$.

**3.** Soient $x$, $y$ deux réels.

**a)** Montrer que pour tout réel $a \in A$

$$d(x, A) \leq |x-y| + |y-a|.$$

**b)** En déduire que $d(x, A) \leq |x-y| + d(y, A)$.

**c)** Montrer que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x-y|.$$

**Exercice 2.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

**1.** Écrire, dans le langage `Python`, une fonction `suite(n)` qui étant donnée un entier naturel `n`, renvoie une liste dont le premier élément est $u_{\mathtt{n}}$ et le deuxième est $v_{\mathtt{n}}$.

**2. Convergence des suites.**

**a)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n < v_n$.

**b)** Étudier la monotonie de chacune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**c)** En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une limite commune notée $\ell$.

**3. Détermination de la limite.**

**a)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n$.

**b)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$.

**c)** En déduire la valeur de $\ell$.

**4.** Donner un équivalent de $\frac{\sqrt{5u_n}}{\sqrt{3}} - 1$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

**1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini.

**2. Limites éventuelles.** On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$. Déterminer les valeurs possibles de $\ell$.

**3. Le cas où $u_0 = u_1$.** On suppose dans cette question qu'il existe un réel $a$ strictement positif tel que $u_0 = u_1 = a$.

**a)** Si $u_1 \leq u_2$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**b)** Montrer que si $0 < a \leq 4$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 4.

**c)** Montrer que si $a \geq 4$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

**4. Le cas général.** Soient $M = \max\{u_0, u_1, 4\}$ et $m = \min\{u_0, u_1, 4\}$. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = v_1 = m$, $w_0 = w_1 = M$ et pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+2} = \sqrt{v_n} + \sqrt{v_{n+1}}, \quad w_{n+2} = \sqrt{w_n} + \sqrt{w_{n+1}}.$$

**a)** Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, v_n \leq u_n \leq w_n.$$

**b)** En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

**Problème. (Une histoire de densité)** Soit $M$ une partie majorée de $\mathbb{R}_+^\star$ contenant au moins deux éléments et telle que pour tout $(a, b) \in M^2$, $\sqrt{ab} \in M$. On souhaite montrer que $M \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ est dense dans $I = [\inf M, \sup M]$.

**1.** Montrer que $I$ est bien défini.

**2.** On souhaite montrer que $M$ est dense dans $I$. Pour cela, on suppose pour cela qu'il existe un intervalle non vide $]a, b[\subset I$ tel que $]a, b[\cap M = \emptyset$.

**a)** Soit $\mathscr{A} = \{\inf M \leq x < b\ ;\ ]x, b[\cap M = \emptyset\}$. Montrer que $\mathscr{A}$ possède une borne inférieure que nous noterons $\alpha$.

De manière analogue, nous poserons (sans en justifier l'existence)

$$\beta = \sup\{a < x \leq \sup M\ ;\ ]a, x[\cap M = \emptyset\}.$$

**b)** Montrer que $\sqrt{\alpha\beta} \in M$.

**c)** Conclure.

**3.** On souhaite montrer que $M \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ est dense dans $I$. On suppose par l'absurde qu'il existe un intervalle non vide $]a, b[\subset I$ tel que $M\cap]a, b[\subset \mathbb{Q}$.

On rappelle que tout nombre rationnel positif $r$ s'écrit de manière unique sous la forme $r = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(r)}$, où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers positifs et $(v_p(r))_{p\in\mathscr{P}}$ est une suite d'entiers relatifs nulle à partir d'un certain rang.

**a)** Soit $x$ un nombre rationnel positif. Montrer que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ si et seulement si pour tout $p \in \mathscr{P}$, $v_p(x)$ est pair.

**b)** Montrer qu'il existe un réel $x \in M\cap]a, b[$ et une suite et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $M\cap]a, b[$ telle que $y_0 > x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \sqrt{xy_n}$.

**c)** Soit $p \in \mathscr{P}$. En déduire une relation de récurrence entre $v_p(y_n)$ et $v_p(y_{n+1})$ puis montrer que la suite $(v_p(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

**d)** Conclure.