STANISLAS — Devoir Surveillé — **MPSI 1**

DS n°5 — 4h — 14 janvier 2012

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1.

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, de limite nulle. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

a) Monter que $(S_{2n})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

b) En déduire que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge. On notera S sa limite.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $|S - S_n| \leq a_n$.

2. Soit x un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+x}$.

a) Montrer que $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite convergente. On note $f(x)$ sa limite.

b) Pour tout réel x strictement positif, calculer $f(x) + f(x+1)$.

3. Soient $0 < x < y$.

a) Montrer que la suite de terme général $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+x)(k+y)}$ est convergente. On notera T sa limite.

b) Montrer que $\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x+1)(y+1)} \leq T \leq \frac{1}{xy}$.

c) Montrer que $f(x) - f(y) = (y-x)T$.

d) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

4. Soient $a > 0$ et x, $x_0 \in]a, +\infty[$.

a) Montrer que $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x-x_0|}{a^2}$.

b) En déduire que f admet une limite en x_0. Préciser la valeur de cette limite.

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

5. On admet que $f(1) = \ln 2$. Pour tout entier naturel non nul p, calculer $f(p)$.

6. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $x \cdot f(x)$. En déduire un équivalent de f en 0.

7. Soit $x > 0$.

a) Montrer que $f(x+1) \leq \frac{1}{2x} \leq f(x)$.

b) En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Problème. (Un peu de topologie) Dans tout le problème, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que x est un point d'accumulation de A si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus\{x\})\cap A$. On note A' l'ensemble des points d'accumulations de A et $\overline{A} = A \cup A'$.

1. Points d'accumulation.

a) On suppose que $A' \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in A'$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

c) On suppose dans cette question que $\sup A$ existe. Montrer que $\sup A \in \overline{A}$.

d) On suppose dans cette question que $A =]0, 1[$. Déterminer $\overline{A}$.

2. On note $d_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \inf_{y\in A} |x-y|$.

a) Montrer que d_A est bien définie.

b) Montrer que la fonction d_A est uniformément continue.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

5. Montrer que si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors $f(A)$ est dense dans $\operatorname{Im} f$.

Soient C, D deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que C et D sont séparées si et seulement si $C \cap \overline{D} = D \cap \overline{C} = \emptyset$.

6. Proposer, en jusitifiant votre affirmation, un exemple de deux parties de $\mathbb{R}$ séparées.

On dit que A est connexe si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés et non vides.

7. Soit I une partie connexe de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On souhaite montrer que $f(I)$ est connexe.

On suppose par l'absurde qu'il existe deux ensembles non vides et séparés C, D tels que $f(I) = C \cup D$. On pose $G = I \cap f^{-1}(C)$ et $H = I \cap f^{-1}(D)$.

a) Montrer que $\overline{G} \subset f^{-1}(\overline{C})$.

b) En déduire que $\overline{G} \cap H = \emptyset$.

c) En déduire que I n'est pas connexe puis conclure.

8 . a) Montrer qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si pour tous $x, y, z \in I$, $(z \in]x, y[\Rightarrow z \in I)$.

b) En déduire une nouvelle démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.